

Билјана Крстеска

Јасмина Маркоска

МАТЕМАТИКА

за III година

на средното стручно четиригодишно образование

Геолошко-рударска и металуршка/Геологија

рударство и металургија

Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија

Електротехничка/Електротехника

Машинска/Машинство

Сообраќајна/Сообраќај

Транспорт и складирање

Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи

Хемиско-технолошка/Хемија и технологија

Билјана Крстеска

Јасмина Маркоска

МАТЕМАТИКА

**за III година на средното стручно
четиригодишно образование**

**СТРУКА/СЕКТОР: Геолошко-рударска и
металуршка/Геологија, рударство и металургија,
Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија,
Електротехничка/Електротехника,
Машинска/Машинство,
Сообраќајна/Сообраќај, Транспорт и складирање,
Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи и
Хемиско-технолошка/Хемија и технологија**

МАТЕМАТИКА

за III година на средното стручно четиригодишно образование

СТРУКА/СЕКТОР: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, Транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи и Хемиско-технолошка/Хемија и технологија

Автори:

Билјана Крстеска
Јасмина Маркоска

Рецензенти:

Алит Ибраими
Јагода Танушоска
Цана Наумовска

Лектор:

Виолета Јовановска

Стручна редакција:

Ристо Малчески

Уредник:

Елена Стефановска

Илустрации:

Билјана Крстеска
Јасмина Маркоска

Издавач: Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија,
ул. „Св. Кирил и Методиј“ бр. 54, 1000 Скопје

Графичко и техничко уредување: Ели Василевска Илиевска – АРС СТУДИО

Место и година на издавање: Скопје, 2025 година

Со одлука за одобрување на учебникот МАТЕМАТИКА за III година на средното стручно четиригодишно образование (Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, Транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи и Хемиско-технолошка/Хемија и технологија) бр. 26-1301/1 од 9.5.2023 година донесена од Националната комисија за учебници.

ПРЕДГОВОР

Учебникот **МАТЕМАТИКА** за трета година на средното стручно четиригодишно образование е пишуван според наставната програма за истоимениот задолжителен предмет. Наменет е за учениците од Геолошко-рударската и металуршката струка, сектор Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетската струка, сектор Градежништво и геодезија, Електротехничката струка, сектор Електротехника, Машинската струка, сектор Машинство, Сообраќајната струка, сектор Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарската струка, сектор Текстил, кожа и слични производи и Хемиско-технолошката струка, сектор Хемија и технологија.

Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на програмата. Учебникот е модуларно дизајниран и се состои од пет модуларни единици:

- Експоненцијална функција. Експоненцијална равенка
- Логаритамска функција. Логаритамска равенка
- Тригонометриски функции од произволен агол
- Аналитичка геометрија во рамнина
- Комбинаторика и веројатност

Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини, кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна единица дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, што претставува продолжување на работата на часот, а на крајот од секоја наставна тема дадени се задачи за повторување и утврдување на материјалот. Решенијата и одговорите на задачите, а по избор на авторите, некаде и упатство за нивно решавање, дадени се на крајот од учебникот.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците повеќе да ја засакаат математиката и да навлезат во нејзините тајни.

Јуни, 2021

Авторите

1. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

1.1. Поим и основни својства на експоненцијална функција

Поим за експоненцијална функција

Во оваа лекција ќе го воведеме поимот за експоненцијална функција кој е тесно поврзан со поимот степен со реален показател. Од тие причини на почеток ќе се потсетиме на поимот степен со реален показател и ќе ги наведеме неговите основни својства.

За секој реален број $a > 0$ и за секој реален број x , степенот a^x е еднозначно определен реален број. Притоа важат следните својства:

$$1^\circ a^x > 0, \text{ за секој реален број } x;$$

$$2^\circ a^0 = 1;$$

$$3^\circ a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \text{ за секои реални броеви } x \text{ и } y;$$

$$4^\circ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \text{ за секои реални броеви } x \text{ и } y;$$

$$5^\circ a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \text{ за секој реален број } x;$$

$$6^\circ (a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}, \text{ за секои реални броеви } x \text{ и } y;$$

$$7^\circ (ab)^x = a^x b^x, \text{ за секој реален број } x;$$

$$8^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \text{ за секој реален број } x;$$

$$9^\circ \text{ Ако } a > 1 \text{ и } x < y, \text{ тогаш } a^x < a^y;$$

$$10^\circ \text{ Ако } 0 < a < 1 \text{ и } x < y, \text{ тогаш } a^x > a^y;$$

$$11^\circ a^x > 1 \text{ за } a > 1, x > 0;$$

$$12^\circ a^x < 1 \text{ за } a > 1, x < 0;$$

$$13^\circ a^x < 1 \text{ за } 0 < a < 1, x > 0;$$

$$14^\circ a^x > 1 \text{ за } 0 < a < 1, x < 0;$$

$$15^\circ \text{ За } a > 0, a \neq 1, A > 0 \text{ постои единствен реален број } x, \text{ така што } a^x = A.$$

Фактот дека за секој реален број $a > 0$ и за секој реален број x , степенот a^x е еднозначно определен реален број овозможува воведување на нова класа реални функции.

Дефиниција 1. Функција од облик $y = f(x) = a^x$, каде што $a > 0$ и $a \neq 1$, се вика **експоненцијална функција**.

Ограничување $a \neq 1$ во дефиницијата е потребно заради фактот дека при $a = 1$ функцијата $f(x) = a^x = 1^x = 1$ е константната функција и неа нема да вклучиме во класата на експоненцијални функции.

Пример 1. Функциите $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 0,25^x$, $y = (\sqrt{5})^x$ се примери на експоненцијални функции. ♦

Задача 2. Кои од следниве функции:

а) $y = x^3$ **б)** $y = 7^{x+1}$ **в)** $y = 2^{\frac{1}{x}}$ **г)** $y = 4^{-\sqrt{x}}$
се експоненцијални?

Решение. Експоненцијални се функциите под б), в) и г). ♦

Основни својства на експоненцијалната функција

Со користење на дефиницијата за експоненцијална функција и својствата на степен со реален показател, доаѓаме до следните својства на експоненцијалната функција.

- За $a > 0$ и $a \neq 1$, степенот a^x е дефиниран за секоја вредност на x . Според тоа, дефинициона област D_f на експоненцијалната функција е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

- Од својствата 1^0 и 15^0 за степен со реален показател, следува дека множеството вредности на експоненцијалната функција се состои од сите позитивни реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}^+$.

- Исто така, од својствата 1^0 и 15^0 може да заклучиме дека графикот на секоја експоненцијална функција $y = a^x$ е непрекината линија над x -оската.

- Бидејќи $a^0 = 1$ за секое $a > 0$, графикот на експоненцијалната функција ја сече y -оската во точката $(0,1)$.

- Од својствата 9^0 и 10^0 имаме дека за $a > 1$ ако $x_1 < x_2$, тогаш $a^{x_1} < a^{x_2}$ и за $0 < a < 1$ ако $x_1 < x_2$ тогаш $a^{x_1} > a^{x_2}$. Тоа значи дека функцијата $y = a^x$ е монотона. Поточно, за $a > 1$ имаме дека функцијата $y = a^x$ е монотонно растечка на множеството реални броеви, додека за $0 < a < 1$ функцијата $y = a^x$ е монотонно опаѓачка на множеството реални броеви.

Пример 3. Да ги искажеме својствата на функцијата $y = 2^x$.

Дефинициона област D_f на функцијата е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$, додека множеството вредности на функција се состои од сите позитивни реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}^+$.

Графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, и ја сече y -оската во точката $(0,1)$.

Бидејќи $2 > 1$ функцијата е растечка на множеството реални броеви. ♦

Задача 4. Најди ја дефиниционата област на следните функции:

а) $y = 2^{x+1}$ б) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ в) $y = 3^{\frac{1}{x}}$ г) $y = 4^{\sqrt{x}}$

Решение. а) Дефиниционата област е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

б) Дефиниционата област е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

в) Дропката $\frac{1}{x}$ е дефинирана за сите реални броеви $x \neq 0$, па според тоа $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

г) Квадратниот корен е дефиниран за ненегативни реални броеви, па според тоа $D_f = [0, +\infty)$. ♦

Задача 5. Испитај ја монотоноста на следните функции:

а) $y = 3^x$ б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ в) $y = 0,7^{x+2}$ г) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

Решение. Функциите под а) и г) се монотонно растечки бидејќи основата на степенот е поголема од 1, додека функциите под б) и в) се монотонно опаѓачки бидејќи основата на степенот е реален број помеѓу 0 и 1. ♦

Задача 6. Кој од броевите е поголем во дадените неравенства, x или y ?

а) $0,4^x > 0,4^y$ б) $1,4^x > 1,4^y$

Решение. а) Заради тоа што експоненцијалната функција $0,4^x$ монотонно опаѓа имаме дека $0,4^x > 0,4^y$ кога $x < y$.

б) Заради тоа што експоненцијалната функција $1,4^x$ монотонно расте имаме дека $1,4^x > 1,4^y$ кога $x > y$.

Задачи

1. Кои од следниве функции

а) $y = 5^{x-1}$ б) $y = \sqrt[3]{x^2}$ в) $y = 7^{\frac{1}{x-3}}$ г) $y = 4^{\sqrt{x+2}}$

се експоненцијални?

2. Искажи ги својствата на следните функции:

а) $y = 3^x$ б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ в) $y = 5,2^x$ г) $y = 0,4^x$

3. Најди ја дефиниционата област на следните функции:

а) $y = 3^{x-2}$ б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ в) $y = 4^{\frac{1}{x-1}}$ г) $y = 7^{\sqrt{x+4}}$

4. Испитај ја монотоноста на следните функции:

а) $y = 7^{x+3}$ б) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ в) $y = 0,2^{x-1}$ г) $y = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3}$

5. Кој од броевите е поголем во дадените неравенства, x или y ?

а) $\pi^x > \pi^y$ б) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^x > \left(\frac{1}{\pi}\right)^y$

1.2. График на експоненцијална функција

Сега ќе го конструираме графикот на експоненцијалната функција $y = a^x$ во однос на избран Декартов координатен систем xOy . Од својствата што ги наведовме во претходната лекција за графикот на експоненцијалната функција знаеме дека графикот е непрекината линија над x -оската, и ја сече y -оската во точката $(0,1)$.

Пример 1. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = 2^x$.

Наоѓаме неколку точки од графикот

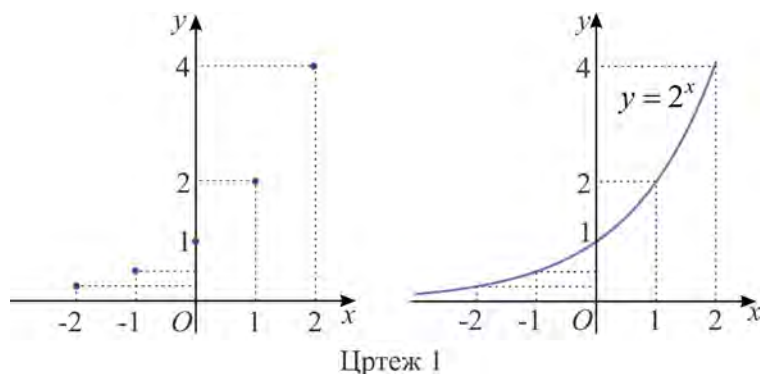
x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Да забележиме дека вредностите на функцијата во табелата ги добиваме на следниот начин:

$$y(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad y(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad y(0) = 2^0 = 1,$$

$$y(1) = 2^1 = 2, \quad y(2) = 2^2 = 4.$$

Потоа нив ги нанесуваме во правоаголен координатниот систем xOy . Ако нанесеме повеќе точки, имајќи во вид дека $y = 2^x$ е монотонно растечка функција, добиваме интуитивна претстава за нејзиниот график (цртеж 1).



Да забележиме дека кога вредностите на x неограничено опаѓаат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон x -оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре x -оската. Тогаш велиме дека x -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = 2^x$. ♦

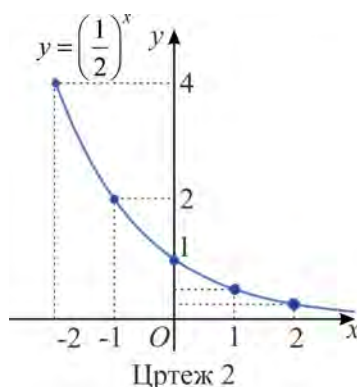
Пример 2. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Наоѓаме неколку точки од нејзиниот график:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Добиените точките ги нанесуваме во координатен систем xOy . Поврзувајќи ги овие точки со непрекинатата линија, го добиваме графикот на функцијата

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (цртеж 2).

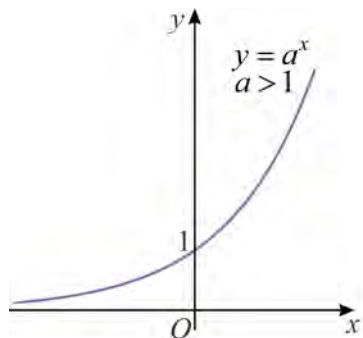


Да забележиме дека кога вредностите на x неограничено растат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон x -оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре x -оската. Тогаш велиме дека x -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. ♦

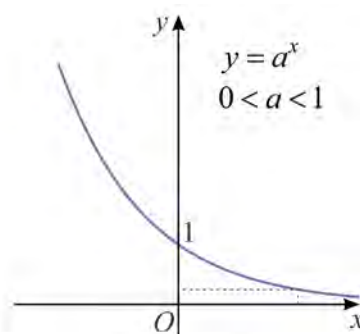
Заклучокот од претходните примери важи и во општ случај. Поточно, за $a > 1$ ако вредностите на x неограничено опаѓаат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула, односно x -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = a^x$ (цртеж 3).

Слично, за $0 < a < 1$ ако вредностите на x неограничено растат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не

достигнуваат вредност нула, односно x -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = a^x$ (цртеж 4).



Цртеж 3

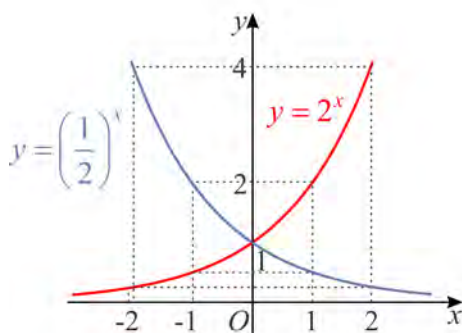


Цртеж 4

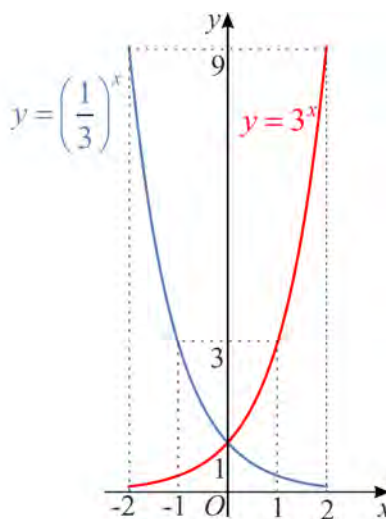
Пример 3. Да ги нацртаме во ист координатен систем графиците на функциите:

а) $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

б) $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Цртеж 5



Цртеж 6

Забележуваме дека графиците на функциите $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ се симетрични во однос на y -оската (цртеж 5). Навистина, ако точката $M(x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = 2^x$ тогаш $N(-x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, бидејќи $2^x = 2^{-(-x)} = \frac{1}{2^{-x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

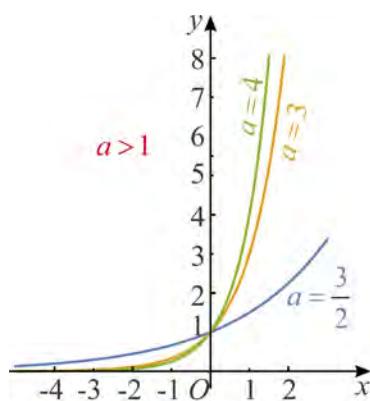
Слично, се покажува дека графиците на функциите $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ се симетрични во однос на y -оската (цртеж 6). ♦

Согледувањата од последниот пример важат за кои било две експоненцијални функции $y = a^x$ и $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Навистина, ако точката $M(x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = a^x$ тогаш $N(-x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, бидејќи $a^x = a^{-(-x)} = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

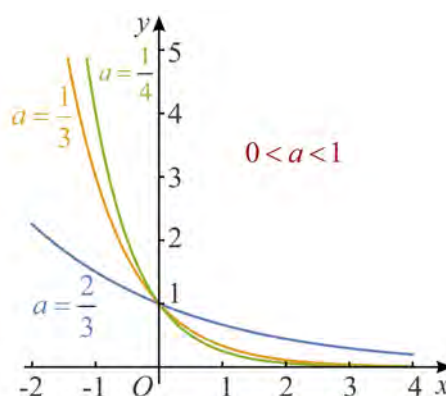
Пример 4. На цртеж 7 и цртеж 8 се нацртани графици на некои експоненцијални функции:

а) $y = a^x$ за $a > 1$

б) $y = a^x$ за $0 < a < 1$



Цртеж 7



Цртеж 8

Од погорниот пример може да согледаме дека за иста вредност $x > 0$, вредностите на експоненцијалните функции $y = a_1^x, y = a_2^x, \dots$, се во ист редослед како вредностите $a_1, a_2, \dots$, за $a_1, a_2, \dots > 1$, а во обратен редослед од редоследот на $a_1, a_2, \dots$, за $0 < a_1, a_2, \dots < 1$.

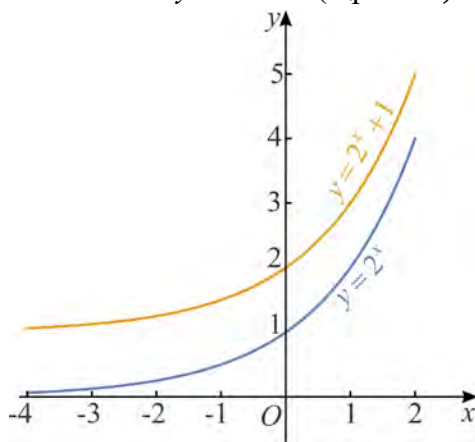
Од друга страна, за иста вредност $x < 0$, вредностите на експоненцијалните функции $y = a_1^x, y = a_2^x, \dots$, се во обратен редослед од редоследот на вредностите $a_1, a_2, \dots$, за $a_1, a_2, \dots > 1$, и се во ист редослед како вредностите $a_1, a_2, \dots$, за $0 < a_1, a_2, \dots < 1$.

Пример 5. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = 2^x + 1$.

Наоѓаме неколку точки од нејзиниот график:

x	$\dots$	-2	-1	0	1	2	$\dots$
$y = 2^x$	$\dots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\dots$
$y = 2^x + 1$	$\dots$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5	$\dots$

Освен со помош на погорната табела, графикот на функцијата $y = 2^x + 1$ може да се добие од графикот на функцијата $y = 2^x$ со негова translација за 1 единица во позитивната насока на y -оската (цртеж 9). ♦

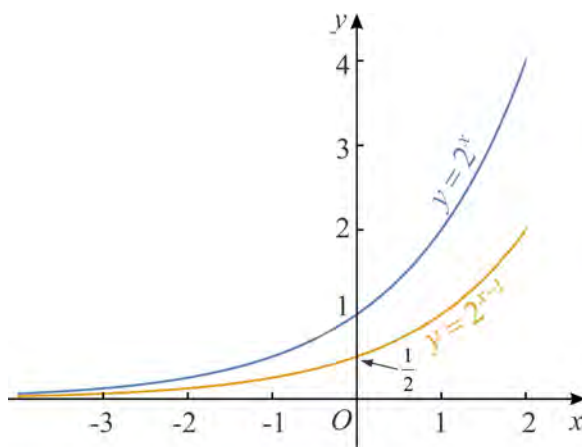


Цртеж 9

Пример 6. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = 2^{x-1}$. Наоѓаме неколку точки од нејзиниот график:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = 2^x$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...
$y = 2^{x-1}$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	

Освен со помош на погорната табела, графикот на експоненцијалната функција $y = 2^{x-1}$ може да се добие со translација на графикот на експоненцијалната функција $y = 2^x$ за 1 единица во позитивната насока на x -оската (цртеж 10). ♦



Цртеж 10

Задачи

1. Нацртај го графикот на функциите:

$$\text{а) } y = 5^x \quad \text{б) } y = \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad \text{в) } y = -2^x \quad \text{г) } y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

2. Нацртај го графикот на функциите:

$$\text{а) } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \text{ во интервалот } -1 \leq x \leq 2; \quad \text{б) } y = 2 \cdot 3^x, \text{ за } x \leq 1.$$

3. Нацртај го графикот на функциите:

$$\text{а) } y = 2^x - 2 \quad \text{б) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

1.3. Експоненцијална равенка

Поим за експоненцијална равенка

Дефиниција 1. Равенка кај која што непознатата се наоѓа во степеновиот показател на барем еден степен, со основа позитивен реален број, различен од 1, се нарекува **експоненцијална равенка**.

Пример 1. Експоненцијални равенки се, на пример, равенките:

$$2^x = 8, \quad 4^{x-3} = x - 2, \quad 2 \cdot 3^{x+3} = 5 \cdot 3^x + 49 \quad \text{и} \quad x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3. \quad \blacklozenge$$

Задача 2. Определи кои од следниве равенки се експоненцијални

$$\text{а) } 2^{x+3} = 4^{x+2}; \quad \text{б) } (-3)^{x+7} = x + 2; \quad \text{в) } 5^{\sqrt{x-2}} = 7 + x^2; \quad \text{г) } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}.$$

Решение. Равенките под а), в) и г) се експоненцијални, додека равенката по б) не е експоненцијална бидејќи степеновиот показател не е позитивен реален број. $\blacklozenge$

Решавање на некои видови експоненцијални равенки

Експоненцијалните равенки ќе ги решаваме во множеството реални броеви. Не постои општа постапка за решавање која што ќе ја опфати целата класа експоненцијални равенки. Затоа, нашата цел е да решиме дел од нив со примена на определени правила кои почиваат на техники кои ни се познати од досегашното изучување на математиката.

Во продолжение ќе решиме некои видови експоненцијални равенки.

I. Равенки од видот $A^x + m = 0$, $A > 0$, $A \neq 1$, $m < 0$

Задача 3. Реши ја равенката $3^x = 27$.

Решение. Дадената равенка $3^x = 27$ ја запишуваме во облик $3^x = 3^3$, при што добиваме равенка еквивалентна на дадената. Потоа ќе искористиме една значајна карактеристика на експоненцијалната функција, имено

за $a > 0$, $a \neq 1$, $a^{x_1} = a^{x_2}$ ако и само ако $x_1 = x_2$.

Во таа смисла $3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$, од каде што заклучуваме дека равенката $3^x = 27$ има единствено решение $x = 3$. Проверка: $3^3 = 27$. ♦

Задача 4. Реши ги равенките:

а) $4^x = \frac{1}{16}$ **б)** $5^x = 1$ **в)** $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125}$ **г)** $25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^4$

Решение. а) $4^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 4^x = 4^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

Проверка: $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.

б) $5^x = 1 \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$ Проверка: $5^0 = 1$.

в) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

Проверка: $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$.

г) $25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{-4} \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$.

Проверка: $25^{-2} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^4$. ♦

Задача 5. Реши ги равенките:

а) $\frac{5^x}{5} = \frac{3^x}{3}$ **б)** $3 \cdot 7^x = 147$ **в)** $\frac{4^x}{4} = \frac{7^{2x-1}}{7}$ **г)** $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21$

Решение. а) $\frac{5^x}{5} = \frac{3^x}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = 1$

б) $3 \cdot 7^x = 147 \Leftrightarrow 7^x = 49 \Leftrightarrow 7^x = 7^2 \Leftrightarrow x = 2$

в) $\frac{4^x}{4} = \frac{7^{2x-1}}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} = \frac{7^{2x} \cdot 7^{-1}}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} = \frac{49^x}{49} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{49}\right)^x = \frac{4}{49} \Leftrightarrow x = 1$

г) $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x + 3^x = 21 \Leftrightarrow 3^x(9 - 3 + 1) = 21 \Leftrightarrow$

$3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. ♦

II. Равенки од видот $A^{f(x)} + m = 0$, $A > 0$, $A \neq 1$, $m < 0$

Задача 6. Реши ги равенките:

а) $3^{x+5} = 81$ б) $2^{3x-1} = 32$ в) $3^{x^2} = 81$ г) $3^{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 1$

Решение. а) $3^{x+5} = 81 \Leftrightarrow 3^{x+5} = 3^4 \Leftrightarrow x+5 = 4 \Leftrightarrow x = -1$

б) $2^{3x-1} = 32 \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 2^5 \Leftrightarrow 3x-1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$

в) $3^{x^2} = 81 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 3^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

г) $3^{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{x+1}{x} - (x+1)} = 3^0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - (x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = x(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. ♦

Задача 7. Реши ги равенките:

а) $3^{x^2-1} = 27$ б) $7^{x^2-3x+1} = \frac{1}{7}$ в) $5^{x^2-3x+3,5} = 125\sqrt{5}$ г) $(25^{x+1})^{x-2} = 1$

Решение. а) $3^{x^2-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-1} = 3^3 \Leftrightarrow x^2-1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

б) $7^{x^2-3x+1} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7^{x^2-3x+1} = 7^{-1} \Leftrightarrow x^2-3x+1 = -1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$

в) $5^{x^2-3x+3,5} = 125\sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{x^2-3x+3,5} = 5^{3+0,5} \Leftrightarrow x^2-3x+3,5 = 3,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$ ♦

г) $(25^{x+1})^{x-2} = 1 \Leftrightarrow (5^{2(x+1)})^{x-2} = 1 \Leftrightarrow 5^{2(x+1)(x-2)} = 5^0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$.

III. Равенки од видот $a(A^{f(x)})^2 + bA^{f(x)} + c = 0$

Со смената $A^{f(x)} = t$ ја добиваме квадратната равенка $at^2 + bt + c = 0$. За секое решение на квадратната равенка ја решаваме експоненцијалната равенка $A^{f(x)} = t$.

Задача 8. Реши ги равенките:

а) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ б) $16^x - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$ в) $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

Решение. а) Равенката $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ со смената $2^x = t$ се сведува на равенката $t^2 - 6t + 8 = 0$ чии што корени се $t_1 = 2$ и $t_2 = 4$. Оттука, согласно во-

ведената смена, ги добиваме равенките $2^x = 2$ и $2^x = 4$. Со нивно решавање ги добиваме решенијата на појдовната равенка $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

б) Равенката $16^x - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$ со смената $4^x = t$ се сведува на равенката $t^2 - 3t + 2 = 0$ чии што корени се $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Оттука ги добиваме равенките $4^x = 1$ и $4^x = 2$. Со нивно решавање ги добиваме решенијата на дадената равенка $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.

в) Равенката $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ со смената $2^x = t$ се сведува на равенката $t^2 + 3t - 4 = 0$ чии што корени се $t_1 = -4$ и $t_2 = 1$. Така ги добиваме равенките $2^x = -4$ и $2^x = 1$. Равенката $2^x = -4$ нема решение во множеството реални броеви, додека решението на равенката $2^x = 1$ е $x = 0$. Според тоа, дадената равенка има единствено решение $x = 0$. ♦

Задача 9. Реши ги равенките:

а) $12^{2\sqrt{x}} - \sqrt[3]{81} = 27$ **б)** $27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} + 3 = 0$ **в)** $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$

Решение. а) Равенката $12^{2\sqrt{x}} - (\sqrt[3]{81})^2 = 27$ со смената $\sqrt[3]{81} = t$ се сведува на равенката $t^2 - 12t + 27 = 0$ чии што корени се $t_1 = 9$ и $t_2 = 3$. Така ги добиваме равенките $\sqrt[3]{81} = 9$ и $\sqrt[3]{81} = 3$. Со нивно решавање ги добиваме решенијата на равенката $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

б) Дадената равенка $27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} + 3 = 0$ е еквивалентна на равенката $(3^{3\sqrt{x}})^2 - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$ која со смената $3^{3\sqrt{x}} = t$ се сведува на квадратната равенка $t^2 - 4t + 3 = 0$ чии што корени се $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$. Оттука, согласно воведената смена, ги добиваме равенките $3^{3\sqrt{x}} = 1$ и $3^{3\sqrt{x}} = 3$. Со нивно решавање ги добиваме решенијата на појдовната равенка $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{9}$.

в) Равенката $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$ е еквивалентна на равенката $3^{2x} + 2^{2x} = 2 \cdot 2^x 3^x$, односно на равенката $\frac{3^{2x}}{2^{2x}} + 1 = 2 \cdot \frac{3^x}{2^x}$, која може да трансформира во равенката $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Смената $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ се сведува на равенката $t^2 - 2t + 1 = 0$ чиј што двоен корен е $t = 1$. Со враќање на смената ја добиваме равенките $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ од каде го наоѓаме единственото решение на дадената равенка $x = 0$. ♦

Задачи

1. Реши ги равенките:

а) $9^x = \frac{1}{729}$ б) $5^x = \left(\frac{4}{5} \cdot 1,25\right)^{10}$ в) $(\sqrt{10})^x \cdot 0,1 = 1000$

2. Реши ги равенките:

а) $16^{x-0,5} = 32^{14-x}$ б) $2 \cdot 5^x = 50$ в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x} - \frac{125}{64} = 0$ г) $10^{\frac{4}{x}} = 10^{x-3}$

3. Реши ги равенките:

а) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ б) $49^x + 4 \cdot 7^x - 5 = 0$
в) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$ г) $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{-x+2} = 135$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Нацртај го графикот на функциите:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ б) $y = 0,3^x$ в) $y = 5^x$ г) $y = \left(\frac{10}{3}\right)^x$

2. Нацртај го графикот на функциите:

а) $y = 1 - 5^x$ б) $y = 3^x + 1$ в) $y = 2^x + 1$ г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

3. За кои реални броеви x и y , важи:

а) $8^x = 8^y$ б) $\sqrt{3}^x > \sqrt{3}^y$ в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$

4. Што е поголемо $a^{\frac{2}{3}}$ или $a^{\frac{3}{4}}$ ако:

а) $a > 1$ б) $0 < a < 1$?

Реши ги равенките:

5. $16^{x-0,5} = 32^{14-x}$ 6. $2 \cdot 5^x = 50$ 7. $4^x - 6 \cdot 2^x = -8$

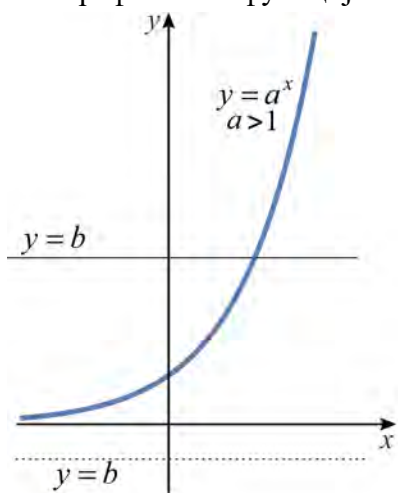
8. $(9^{x-1})^{x-1} = 9^{x-4} \cdot 3^{2x+4}$ 9. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x} - \frac{125}{64} = 0$ 10. $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} = 12$

11. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

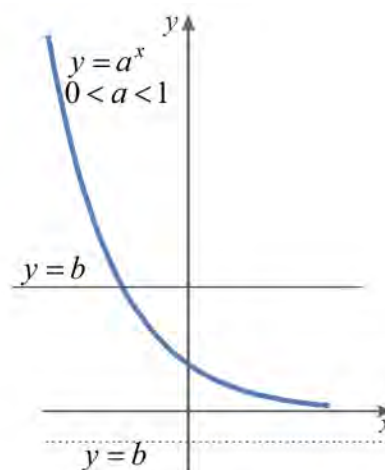
2. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА. ЛОГАРИТАМСКА РАВЕНКА

2.1. Поим за логаритам

Нека $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = a^x$. Правата $y = b$ може да го сече или да не го сече графикот на функцијата $y = a^x$. Од цртеж 1 (за $a > 1$) и цртеж 2 (за $0 < a < 1$) може да забележиме дека правата $y = b$ го сече графикот на функцијата $y = a^x$ за $b > 0$, а не го сече за $b \leq 0$.



Цртеж 1



Цртеж 2

Знаеме дека со функцијата $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, има дефинициона област $\mathbb{R}$ и множество вредности $\mathbb{R}^+$. Уште повеќе од $a^{x_1} = b$ и $a^{x_2} = b$, каде што $b > 0$, следува дека $x_1 = x_2$. Според тоа, ако $b > 0$, тогаш постои точно еден реален број x , таков што $a^x = b$, а ако $b \leq 0$, не постои реален број x за кој $a^x = b$.

Дефиниција 1. Нека $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $b \in \mathbb{R}^+$. Реалниот број x таков што $a^x = b$ се нарекува **логаритам** од b со основа a . Притоа се користи ознаката

$$x = \log_a b.$$

Бројот x се нарекува **логаритам**, бројот a се нарекува **основа на логаритамот**, а бројот b се нарекува **логаритмант**.

Пример 1.

Израз	$\log_2 8 = 3$	$\log_5 (m+3) = 2$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$
Логаритам	3	2	4
Основа на логаритамот	2	5	$\frac{1}{3}$
Логаритмант	8	$m+3$	$\frac{1}{81}$

Согласно дефиницијата, за $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, имаме дека

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Со други зборови, логаритам на позитивен реален број b , со основа a ($a > 0$, $a \neq 1$) е реален број x со кој треба да се степенува основата a , за да се добие бројот b .

Ако во равенството $a^x = b$ го замениме x со $\log_a b$ го добиваме **основниот логаритамски идентитет**

$$a^{\log_a b} = b$$

Пример 2. Да ја провериме точноста на следниве равенства:

а) $\log_3 9 = 2$ **б)** $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ **в)** $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$

а) Точно е дека $\log_3 9 = 2$, бидејќи $3^2 = 9$

б) Равенството $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ е точно, бидејќи $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

в) Имаме дека $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$, бидејќи $(\sqrt{5})^4 = 25$. ♦

Задача 3. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_2 \frac{1}{4}$ **б)** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ **в)** $\log_{\sqrt{3}} 9$

Решение. а) Заради $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ добиваме дека $\log_2 \frac{1}{4} = -2$.

Проверка: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

б) Од $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ следува $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$. Проверка: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$. ♦

в) Од $(\sqrt{3})^4 = 9$ следува дека $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$. Проверка: $(\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 9} = 9$. ♦

Задача 4. Најди го логаритмантот, ако основата е $\frac{1}{2}$ и логаритамот е 4.

Решение. Од $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ следува $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$, па логаритмантот е $\frac{1}{16}$. ♦

Задача 5. Најди ја основата a ако $\log_a \frac{1}{8} = 3$.

Решение. Од дефиницијата за логаритам имаме $a^3 = \frac{1}{8}$, односно

$$a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3. \text{ Значи } a = \frac{1}{2}. \text{ ♦}$$

Задача 6. Со помош на основниот логаритамски идентитет пресметај:

а) $5^{\log_5 2}$; б) $3^{2+\log_3 2}$; в) $7^{2-\log_7 5}$.

Решение. Со помош на основниот логаритамски идентитет добиваме

а) $5^{\log_5 2} = 2$; б) $3^{2+\log_3 2} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 2} = 9 \cdot 2 = 18$;
 в) $7^{2-\log_7 5} = 7^2 \cdot \frac{1}{7^{\log_7 5}} = 49 \cdot \frac{1}{5} = \frac{49}{5}$. ♦

Задачи

1. Пополни ја следната табела:

Израз	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a (b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
Логаритам					
Основа на логаритамот					
Логаритмант					

2. Најди ја вредноста на логаритмите:

а) $\log_3 \frac{1}{9}$ б) $\log_{0,1} 0,01$ в) $\log_3 \sqrt{3}$ г) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$

3. Користејќи ја дефиницијата за логаритам, најди го x ако:

а) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ б) $\log_x 36 = 2$ в) $\log_5 x = 0$ г) $\log_x 125 = 3$.

4. Најди ја вредноста на изразите:

а) $5^{\log_5 2}$ б) $5^{2\log_5 3}$

5. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_2 8 - \log_3 9$ б) $4\log_{\sqrt{3}} 27 + 3\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

6. За кои вредности на x изразот $\log_{0,2}(x^2 - x)$ има смисла?

2.2. Правила за логаритмирање

Правила за логаритмирање

Нека $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ и $y > 0$.

1. Правило за логаритам од производ: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Доказ. Ако $\alpha = \log_a x$ и $\beta = \log_a y$, тогаш имаме дека $a^\alpha = x$ и $a^\beta = y$. Од $x > 0$, $y > 0$ следува дека $xy > 0$, па според тоа постои $\log_a xy$. Тогаш имаме дека $a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y}$, од каде следува дека

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \blacksquare$$

Пример 1. Со примена на правилото за логаритам од производ добиваме

$$\log_2 6 = \log_2 2 \cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3. \blacklozenge$$

Правилото за логаритам од производ важи и во случај на конечно многу множители, односно за $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$, важи дека

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \dots + \log_a x_n$$

II. Правило за логаритам од степен: $\log_a x^s = s \log_a x$

Доказ. Нека $\alpha = \log_a x$. Од $x > 0$ следува $x^s > 0$. Тогаш постои $\log_a x^s$.

Заради $a^{\log_a x^s} = x^s = \left(a^{\log_a x}\right)^s = a^{s \log_a x}$ добиваме дека

$$\log_a x^s = s \log_a x. \blacksquare$$

Пример 2. Со примена на правилото за логаритам од степен добиваме

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4. \blacklozenge$$

III. Правило за логаритам од количник: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Доказ. Знаејќи дека $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, од правилото за логаритам од производ и логаритам од степен имаме дека

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y. \blacksquare$$

Пример 3. Со примена на правилото за логаритам од количник добиваме

$$\log_7 0,7 = \log_7 \frac{7}{10} = \log_7 7 - \log_7 10 = 1 - \log_7 10. \blacklozenge$$

Како последица на правилото за логаритам со степен $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, имаме

$$\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a x.$$

Пример 4. Со примена на правилото за логаритам со степен имаме дека

$$\log_2 \sqrt[7]{32} = \log_2 \sqrt[7]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7} \log_2 2 = \frac{5}{7}. \blacklozenge$$

Задача 5. Логаритмирај ги изразите:

а) $\frac{3x^4y}{z^7}$

б) $\frac{u^2+w}{t^3+7}$

в) $\frac{a^2\sqrt{b}}{c^3}$.

Решение. Имаме дека

а) $\log \frac{3x^4y}{z^7} = \log 3 + \log x^4 + \log y - \log z^7 = \log 3 + 4 \log x + \log y - 7 \log z$

б) $\log \frac{u^2+w}{t^3+7} = \log(u^2+w) - \log(t^3+7)$

$$\text{в) } \log \frac{a^2 \sqrt{b}}{c^3} = (\log a^2 + \log \sqrt{b}) - \log c^3 = 2 \log a + \frac{1}{2} \log b - 3 \log c. \quad \blacklozenge$$

Декадни логаритми

Севкупноста од логаритмите од сите позитивни броеви, пресметани по иста основа, се вика **логаритамски систем**. Логаритмите пресметани со основа 10 се викаат **декадни логаритми**. Декадните логаритми ги запишуваме со $\log x$, каде што основата 10 не се запишува. Често се користи и ознаката $\lg x$, односно $\log_{10} x = \log x = \lg x$.

Правилата за логаритмирање важат и за декадните логаритми.

Пример 6. Да ги проследиме следниве пресметки:

$$\text{а) } \lg 10 = 1, \quad \lg 100 = \lg 10^2 = 2 \lg 10 = 2, \quad \lg 10000 = \lg 10^4 = 4 \lg 10 = 4;$$

$$\text{б) } \lg 0,1 = \lg \frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1, \quad \lg 0,001 = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3. \quad \blacklozenge$$

Од последната задача може да заклучиме дека логаритам од декадни единици поголеми од 1 е цел позитивен број и има онолку единици колку што има нули декадната единица, а логаритам од декадни единици помали од 1 е цел негативен број кој има онолку единици колку што има нули декадната единица.

Нека x е позитивен реален број за кој $\lg x$ е рационален број, односно $\lg x = k$, $k \in \mathbb{Q}$. Тогаш $x = 10^k$. Според тоа, декаден логаритам од позитивен број кој не е од обликот 10^k , $k \in \mathbb{Q}$, тогаш е ирационален број. Неговиот декаден запис има бесконечно многу децимали, па се покажува практичен договорот за заокружување на бројот на 5 децимали.

Ако A е кој било позитивен реален број, тогаш постои $n \in \mathbb{Z}$, така што $10^{n-1} \leq A \leq 10^n$, од каде следува дека $\lg 10^{n-1} \leq \lg A \leq \lg 10^n$. Според дефиницијата за декаден логаритам имаме $n-1 \leq \lg A < n$. Од последното неравенство следува неравенството: $0 \leq \lg A - (n-1) < 1$. Според тоа

$$\lg A = (n-1) + \alpha, \quad \text{каде што } n \in \mathbb{Z} \text{ и } 0 \leq \alpha < 1.$$

Бројот n се вика **карактеристика**, а α се вика **мантиса** на логаритамот од бројот A . Со други зборови, целиот дел на логаритамот се нарекува карактеристика, а децималниот дел се нарекува мантиса на логаритамот. Според тоа, карактеристиката може да биде позитивен, негативен цел број или нула, додека мантисата е број меѓу 0 и 1.

Задача 7. Одреди ја карактеристиката на $\lg 495,27$.

Решение. Заради $100 \leq 495,27 < 1000$ добиваме $\lg 100 \leq \lg 495,27 < \lg 1000$, односно $2 \leq \lg 495,27 < 3$. Според тоа, $\lg 495,27 = 2 + \alpha$, каде што $0 \leq \alpha < 1$. Карактеристиката на $\lg 495,27$ е 2. $\blacklozenge$

Задача 8. Најди ја карактеристиката на $\lg 0,037$.

Решение. Од $0,01 < 0,037 < 0,1$, имаме дека $\lg 0,01 < \lg 0,037 < \lg 0,1$ или $-2 < \lg A < -1$. Според тоа, $\lg 0,037 = -2 + \alpha$, каде што $0 \leq \alpha < 1$. Карактеристиката на $\lg 0,037$ е -1 . $\blacklozenge$

Од задачите 6 и 7 може да заклучиме дека карактеристиката на броевите поголеми од 1 е за еден помала од бројот на цифрите на целиот дел од неговиот запис, а карактеристиката на броевите помали од 1 е негативен број кој има онолку единици колку што има нули лево од првата цифра различна од нула.

Пример 9. Со примена на калкулатор наоѓаме дека

а) $\lg 24,257 = 1,38484$

б) $\lg 1278,13 = 3,10658$

в) $\lg 0,00257 = -2,59007$. ♦



Задача 10. Најди го декадниот логаритам од изразот $\frac{a^2b}{c^4}$, ако

$\lg a = m, \lg b = n, \lg c = p$.

Решение. Имаме дека

$$\begin{aligned}\lg \frac{a^2b}{c^4} &= \lg a^2b - \lg c^4 = \lg a^2 + \lg b - \lg c^4 = \\ &= 2\lg a + \lg b - 4\lg c = 2m + n - 4p. \text{ ♦}\end{aligned}$$

Задачи

1. Логаритмирај ги следните изрази:

а) $3ab$

б) a^2bc^5

в) $\frac{ab}{2c}$

г) $2(a-b)$

д) $\frac{\sqrt{a}}{b^2 - c^2}$

е) $\sqrt{a^3b^2}$

2. Најди го бројот x , ако е познат неговиот логаритам:

а) $\log x = \log 5 - \log 2 + \log 4$

б) $\log x = 3\log 2 - 2\log 3$

в) $\log x = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\log 2$

г) $\log x = \frac{1}{4}(2\log 2 - 4\log 3 + 5\log 4)$

3. Ако земеме дека $\lg 2 \approx 0,30$ и $\lg 3 \approx 0,48$, најди ја приближната вредност на:

а) $\lg 4, \lg 6, \lg 8, \lg 9$

б) $\lg 12, \lg 16, \lg 18$

4. Запиши ја карактеристиката на логаритмите:

а) $\lg(0,7545 \cdot 0,0256 \cdot 0,65^2)$

б) $\lg \frac{28,5 \cdot 3,507}{0,457 \cdot 0,0293}$

в) $\lg \sqrt[5]{\frac{129}{9775}}$

г) $\lg(0,85 \cdot \sqrt[3]{0,55})$

2.3. Врски меѓу логаритми со различни основи

Нека $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x > 0$.

Правило за смена на основата на логаритам: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Доказ. Ако ги логаритмираме двете страни на равенството $x = a^{\log_a x}$ со основа b , со примена на основниот логаритамски идентитет добиваме дека $\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a$, односно

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \blacksquare$$

Пример 1. Со примена на правилото за смена на основата на логаритам имаме дека

$$\begin{aligned} \log_3 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 9 &= \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 7} \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \log_6 9 = \\ &= \log_3 6 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 6} = \log_3 9 = 2. \blacklozenge \end{aligned}$$

Последица 1. Ако $x = b \neq 1$, тогаш $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Доказ. Според правилото за смена на основата на логаритам, ако избереме b да биде заедничка основа, имаме дека

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}. \blacksquare$$

Пример 2. Со примена на претходната последица на правилото за смена на основата на логаритам наоѓаме дека

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{5}. \blacklozenge$$

Последица 2. Ако $s \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, тогаш $\log_{a^s} b = \frac{1}{s} \log_a b$.

Доказ. Со примена на претходната последица и правилото за логаритам од степен имаме дека

$$\log_{a^s} b = \frac{1}{\log_b a^s} = \frac{1}{s \log_b a} = \frac{1}{s} \log_a b. \blacksquare$$

Пример 3. Со примена на претходната последица наоѓаме дека

$$\log_{2^3} 4 = \frac{1}{3} \log_2 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}. \blacklozenge$$

Последица 3. Ако $s \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, тогаш $\log_{a^s} b^s = \log_a b$.

Доказ. Со примена на претходната последица и правилото за логаритам од степен имаме дека

$$\log_{a^s} b^s = s \log_{a^s} b = s \cdot \frac{1}{s} \log_a b = \log_a b. \blacksquare$$

Пример 4. Со примена на претходната последица на правилото за смена на основата на логаритам наоѓаме дека

$$\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{\frac{1}{3^3}} 9^{\frac{1}{3}} = \log_3 9 = 2. \blacklozenge$$

Пример 5. Ако земеме дека $\lg 2 \approx 0,30$ и $\lg 3 \approx 0,48$, може да пресметаме:

$$\log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5} = \frac{\lg(2 \cdot 3)}{\lg \frac{10}{2}} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 10 - \lg 2} \approx \frac{0,30 + 0,48}{1 - 0,30} = \frac{0,78}{0,70} = \frac{39}{35}. \blacklozenge$$

Задачи

1. Докажи ги равенствата:

а) $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

б) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}.$

2. Пресметај ја вредноста на изразот $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0,125.$

3. Упрости ги изразите:

а) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 4)$ б) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$ в) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}.$

4. Ако $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$, тогаш $\log_b a = -\log_{\frac{1}{b}} a$. Докажи!

2.4. Поим и основни својства на логаритамска функција

Поим за логаритамска функција

Да се потсетиме дека при дефинирање на логаритам рековме дека $\log_a x$, каде што $a > 0$ и $a \neq 1$, има еднозначно определена вредност за секој позитивен реален број x . Тоа овозможува воведување на нова класа реални функции.

Дефиниција. Функцијата од облик $y = f(x) = \log_a x$, каде што $a > 0$ и $a \neq 1$, се нарекува **логаритамска функција**.

Пример 1. Логаритамски функции се, на пример, функциите:

$$y = \log_2 x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = \log_3 x, \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = \lg x, \quad y = \ln x. \blacklozenge$$

Задача 2. Кои од следниве функции:

а) $y = \frac{1}{\log_2 x}$; **б)** $y = \log_x \frac{1}{x}$; **в)** $y = \log_3(x+1)$; **г)** $y = \log x^2$,

се логаритамски?

Решение. Логаритамски се функциите под в) и г). ♦

Основни својства на логаритамска функција

Со помош на дефиницијата за логаритамска функција $y = f(x) = \log_a x$ и својствата на експоненцијална функција $y = f(x) = a^x$, како и врската $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, доаѓаме до следните својства на логаритамската функција.

- Дефинициона област на логаритамската функција $y = f(x) = \log_a x$ е множеството $\mathbb{R}^+$, односно $D_f = \mathbb{R}^+$.
- Множеството вредности на логаритамската функција $y = \log_a x$ е целото множество реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}$.
- Графикот на логаритамската функција $y = \log_a x$ е непрекината линија која минува низ I-квадрант и IV-квадрант.
- Графикот на логаритамската функција $y = \log_a x$ ја сече x -оската во точката $(1, 0)$, бидејќи за $x = 1$ имаме дека $y = \log_a 1 = 0$,
- Логаритамската функција $y = \log_a x$, за $a > 1$ монотонно расте, додека за $0 < a < 1$ монотонно опаѓа на целата дефинициона област D_f .

Пример 3. Да ги искажеме својствата на функцијата $y = \log_2 x$.

Дефинициона област на функцијата е множеството позитивни реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}^+$.

Множеството вредности на функцијата е множество реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}$.

Графикот на функцијата е непрекината линија која минува низ I-квадрант и IV-квадрант, и ја сече x -оската во точката $(1, 0)$.

Функцијата монотонно расте, бидејќи $2 > 1$. ♦

Задача 4. Најди ја дефиниционата област на логаритамските функции:

а) $y = \log_3 x$ **б)** $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ **в)** $y = \lg(x+3)$ **г)** $y = \log_{\frac{1}{4}} x + 7$.

Решение. **а)** Дефиниционата област е множеството позитивни реални броеви, $D_f = \mathbb{R}^+$.

б) Дефиниционата област е множеството позитивни реални, $D_f = \mathbb{R}^+$.

в) Од $x+3 > 0$, добиваме дека $D_f = (-3, +\infty)$

г) Дефиниционата област е множеството позитивни реални, $D_f = \mathbb{R}^+$. ♦

Задача 5. Испитај ја монотоноста на следните функции:

а) $y = \log x$ б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ в) $y = \log_{0,3}(x-3)$ г) $y = \log_5(x^2+4)$

Решение. Функциите под а) и г) се монотонно растечки бидејќи основата на логаритмите е поголема од 1, додека функциите под б) и в) се монотонно опаѓачки бидејќи основата на логаритмите е реален број помеѓу 0 и 1. ♦

Задача 6. Со помош на својствата на логаритамска функција, определи кој број е поголем:

а) $\log_3 2$ или $\log_3 \sqrt{2}$ б) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{5}$ или $\log_{\frac{1}{7}} \frac{3}{8}$

Решение. а) Заради монотоноста на логаритамската функција имаме дека $\log_3 2 > \log_3 \sqrt{2}$, бидејќи $2 > \sqrt{2}$ и $3 > 1$.

б) Заради монотоноста на логаритамската функција имаме дека $\log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{5} < \log_{\frac{1}{7}} \frac{3}{8}$, бидејќи $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$ и $\frac{1}{7} < 1$. ♦

Задачи

1. Кои од следниве функции

а) $y = \log_5(x-1)$ б) $\log_x 7$ в) $y = 7^{\log x}$ г) $y = \sqrt[3]{\log x^2}$

се логаритамски?

2. Искажи ги својствата на следните логаритамски функции:

а) $y = \log_5 x$ б) $y = \log_{0,3} x$ в) $y = \log_{\frac{1}{7}} x$

3. Најди ја дефиниционата област на следните логаритамски функции:

а) $y = \log_5 x + 12$ б) $y = \lg(x+9)$ в) $y = \log_3(x-4)$
г) $y = \log_2(x^2+x)$ д) $y = \log_{\frac{1}{3}}(3x^2+5x+2)$.

4. Испитај ја монотоноста на следните логаритамски функции:

а) $y = -\log_2 x$ б) $y = \log_{\frac{1}{7}}(2x+1)$ в) $y = \ln x$

5. Кој од броевите е поголем во дадените неравенства, a или b ?

а) $\log_5 a > \log_5 b$ б) $\log_{0,5} a > \log_{0,5} b$

2.5. График на логаритамска функција

Сега ќе го конструираме графикот на логаритамската функција $y = \log_a x$ во однос на Декартовиот координатен систем xOy . Од својствата што ги наведовме во претходната лекција за графикот на логаритамската функција знаеме дека графикот е непрекината линија, и ја сече x -оската во точката $(1, 0)$.

Пример 1. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = \log_2 x$.

Наоѓаме неколку точки од графикот

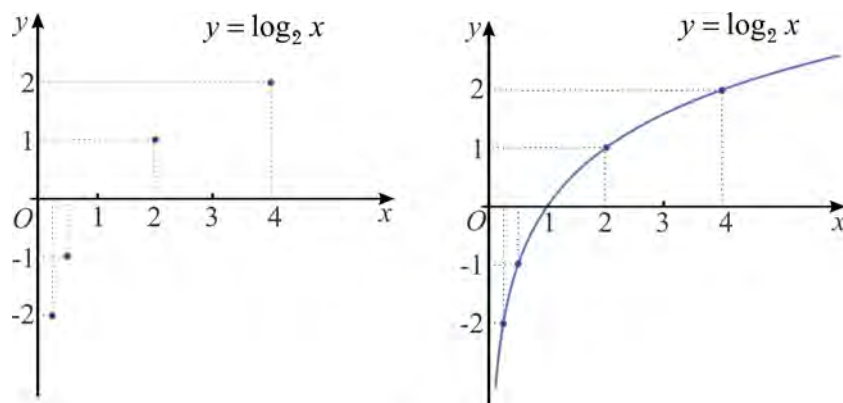
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2

Да забележиме дека вредностите на функцијата во табелата ги добиваме на следниот начин:

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = -2 \log_2 2 = -2, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2 = -1,$$

$$y(1) = \log_2 1 = 0, \quad y(2) = \log_2 2 = 1, \quad y(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2.$$

Потоа нив ги нанесуваме во правоаголен координатниот систем xOy . Ако нанесеме повеќе точки, имајќи во вид дека $y = \log_2 x$ е монотono растечка функција, добиваме интуитивна претстава за нејзиниот график (цртеж 1).



Цртеж 1

Да забележиме дека кога вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено се намалуваат. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон y -оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре y -оската. Тогаш велиме дека y -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = \log_2 x$. ♦

Пример 2. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Слично како во претходниот пример, наоѓаме неколку точки од графикот

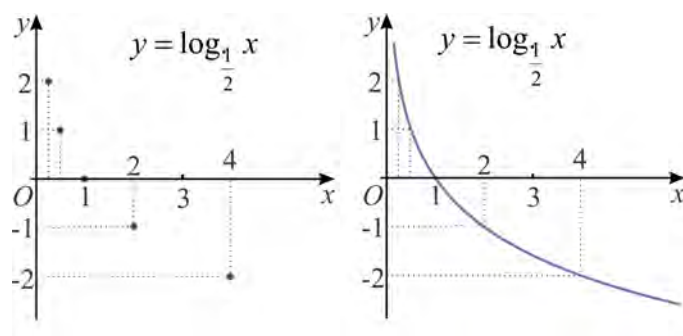
x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	-2	-1	0	1	2

Вредностите на функцијата во табелата ги добиваме со пресметките:

$$y(4) = y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, \quad y(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1, \quad y(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0,$$

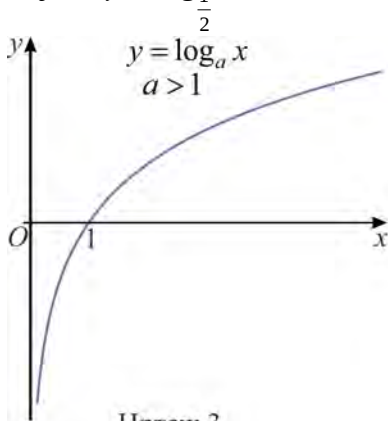
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2.$$

Добиените точки ги нанесуваме во правоаголен координатниот систем xOy . Со нанесување на повеќе точки, имајќи во вид дека $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ е монотono опаѓачка функција, добиваме интуитивна претстава за нејзиниот график (цртеж 2).

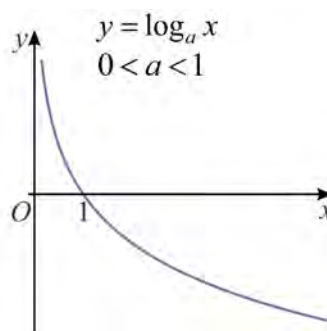


Цртеж 2

Да забележиме дека кога вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено растат. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон y -оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре y -оската. Тогаш велиме дека y -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. ♦



Цртеж 3

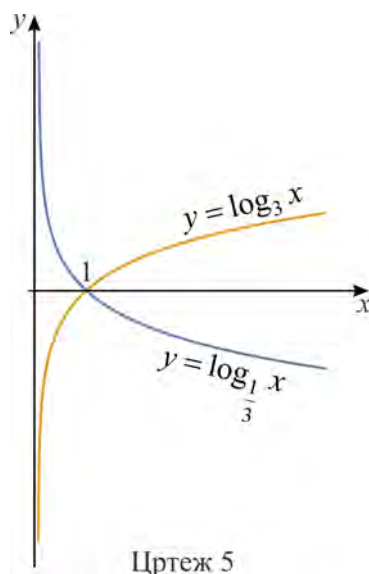


Цртеж 4

Заклучокот од претходните примери важи и во општ случај. Поточно, за $a > 1$ ако вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено се намалуваат, односно y -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = \log_a x$ (цртеж 3).

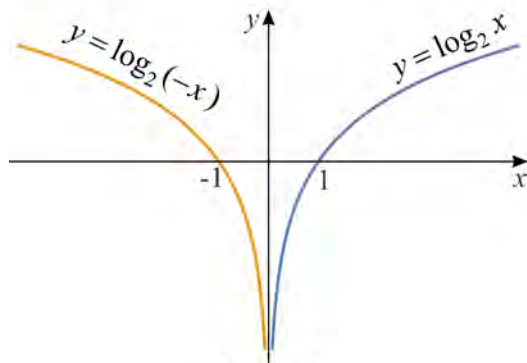
Слично, за $0 < a < 1$ ако вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено растат, односно y -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $y = \log_a x$ (цртеж 4).

Пример 4. Да ги нацртаме графиците на функциите $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ во ист координатен систем. Тие тие се симетрични во однос на x -оската, бидејќи $\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$ (цртеж 5). ♦



Цртеж 5

Заклучокот од претходниот пример важи и во општ случај. Заради равенството $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$, графиците на функциите $y = \log_a x$ и $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ се симетрични во однос на x -оската.



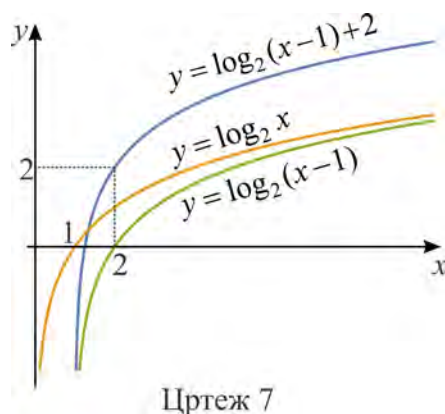
Цртеж 6

Пример 5. Ако ги нацртаме во ист координатен систем графичите на функциите $y = \log_2 x$ и $y = \log_2(-x)$, ќе забележиме дека тие се симетрични во однос на y -оската (цртеж 6). ♦

Заклучокот од претходниот пример важи и во општ случај, односно графичите на функциите $y = \log_a x$ и $y = \log_a(-x)$ се симетрични во однос на y -оската.

Пример 6. Графикот на функцијата $y = \log_2(x-1) + 2$ се добива од графикот на функцијата $y = \log_2 x$ во два чекори:

- графикот на функцијата $y = \log_2(x-1)$ се добива со translација на графикот на функцијата $y = \log_2 x$ за 1 единица во десно,
- графикот на функцијата $y = \log_2(x-1) + 2$ се добива со translација на графикот на функцијата $y = \log_2(x-1)$ за 2 единици нагоре (цртеж 7). ♦



Бидејќи логаритамската функција $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ е монотона на множеството позитивни реални броеви, таа нема најмала и најголема вредност.

Задача 7. Определи го знакот на логаритмите:

- а) $\log_8 0,6$ б) $\log_{0,8} 0,2$.

Решение. а) Основата на логаритмот е $8 > 1$. Ако го имаме во вид графикот на логаритамската функција $y = \log_a x$, $a > 1$ и $x = 0,6 < 1$, заклучуваме дека $\log_8 0,6 < 0$.

б) Основата на логаритмот е $0 < 0,8 < 1$. Ако го земеме предвид графикот на функцијата $y = \log_a x$, $0 < a < 1$ и $x = 0,2 < 1$, заклучуваме дека $\log_{0,8} 0,2 > 0$. ♦

Задачи

1. Нацртај го графикот на функциите:

- а) $y = -\log_2 x$ б) $y = -\log_{\frac{1}{3}}(x)$ в) $y = \log_3(-x)$ г) $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$.

2. Нацртај го графикот на функциите:

- а) $y = \log_2(x+1)$ б) $y = \log_2 x + 1$ в) $y = \log_3(x-2) + 3$.

3. Одреди го знакот на логаритамите:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 0,2$ б) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ в) $\log_{0,7} 100$ г) $\log_3(\sqrt{2}-1)$.

4. Најди за кои вредности на x логаритамските функции

а) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ б) $y = \log_3(x+2)$ в) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x-1)$

добиваат позитивни вредности, а за кои негативни?

2.6. Логаритамски равенки

Равенки кај кои што непознатата се наоѓа во логаритмандот или во логаритамската основа на барем еден логаритам се вика **логаритамска равенка**.

Пример 1. Логаритамски равенки се, на пример, равенките:

$$\log_2(x+4) = 7, \quad \log_{2x}(5+x^2) = 9, \quad \log_5(3x-2) = \log_5 x. \quad \blacklozenge$$

Задача 2. Определи кои од следниве равенки се логаритамски:

а) $\log_3(x^2+4) = 1$ б) $\log_2 \sqrt{3} = x$ в) $\sqrt{x-2} \log 5^x = \log(1+x)$

Решение. Равенките под а) и в) се логаритамски, додека равенката по б) не е логаритамска непознатата не се наоѓа во логаритмандот или во логаритамската основа на барем еден логаритам. $\blacklozenge$

Решавање на некои видови логаритамски равенки

Логаритамските равенки ќе ги решаваме во множеството реални броеви. Не постои општа постапка за решавање која што ќе ја опфати целата класа логаритамски равенки. Затоа, нашата цел е да решиме дел од нив со примена на дефиницијата за логаритам, правилата за логаритмирање и својствата на логаритамската функција.

Во продолжение ќе се обидеме да решиме некои видови логаритамски равенки. Нека $a > 0$, $a \neq 1$.

I. Решавање на логаритамски равенки од видот $\log_a f(x) = b$

Од дефиницијата за логаритам следува еквивалентност на равенките:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x).$$

Задача 2. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x+5) = 3$ б) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-7x+13) = 0$ в) $\log_5(x^2-9)^2 = 2$

Решение. а) Од дефиницијата за логаритам следува дека дадената равенка $\log_3(x+5) = 3$ е еквивалентна на равенката $x+5 = 3^3$, односно на линеарната равенка $x+5 = 27$ чие што решение е $x = 22$.

$$\text{б) } \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 7x + 13) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 13 = (\sqrt{3})^0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ и } x_2 = 4.$$

$$\text{в) } \log_5(x^2 - 9)^2 = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 9)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 + 56 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm \sqrt{14}. \blacklozenge$$

Ако за решавање на логаритамската равенка под в) го искористиме правилото за логаритам од степен добиваме дека

$$\begin{aligned} \log_5(x^2 - 9)^2 = 2 &\Leftrightarrow 2 \cdot \log_5(x^2 - 9) = 2 \Leftrightarrow \log_5(x^2 - 9) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 9 = 5 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Добивме само две решенија на равенката, бидејќи неправилно го користевме правилото за логаритам од степен, односно равенството $\log_a b^2 = 2 \log_a b$, кое е точно само за $b > 0$. Употребата на правилото за логаритам од степен ќе биде правилна ако запишеме:

$$\log_5(x^2 - 9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \log_5 |x^2 - 9| = 2 \Leftrightarrow \log_5 |x^2 - 9| = 1 \Leftrightarrow |x^2 - 9| = 5.$$

II. Решавање на логаритамски равенки од видот $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Решенијата на равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ се добиваат со решавање на равенката $f(x) = g(x)$. Секое решение на равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ е решение на равенката $f(x) = g(x)$. Обратното во општ случај не важи, па затоа за добиените решенија на равенката $f(x) = g(x)$ ќе вршиме проверка во појдовната равенка $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Задача 3. Решете ги равенките:

$$\text{а) } \log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4) \quad \text{б) } \lg(3x - 2 - 2x^2) = \lg(x^2 - 10x - 12)$$

Решение. а) Решенијата на равенката $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$ се добиваат со решавање на равенката $x^2 - 7x + 11 = x - 4$, односно на квадратната равенка $x^2 - 8x + 15 = 0$. Но, не сите решенија на квадратната равенка се решенија на логаритамската равенка, па затоа за добиените решенија на квадратната равенка $x_1 = 3$ и $x_2 = 5$ ќе вршиме проверка во логаритамската равенка.

Проверка: За $x = 3$ добиваме дека $\log_3(3^2 - 7 \cdot 3 + 11) = \log_3(3 - 4)$, односно $\log_3(-1) = \log_3(-1)$, од каде што заклучуваме дека $x = 3$ не е решение на логаритамската равенка.

За $x = 5$ имаме дека $\log_3(5^2 - 7 \cdot 5 + 11) = \log_3(5 - 4)$, односно $\log_3 1 = \log_3 1$, од каде што заклучуваме дека $x = 5$ е решение на логаритамската равенка.

Според тоа, решение на дадената логаритамска равенка е $x = 5$.

б) Решенијата на равенката $\lg(3x - 2 - 2x^2) = \lg(x^2 - 10x - 12)$ се добиваат со решавање на равенката $3x - 2 - 2x^2 = x^2 - 10x - 12$, односно на квадратната ра-

венка $3x^2 - 13x - 10 = 0$. За добиените решенија на квадратната равенка $x_1 = 5$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$ ќе вршиме проверка во логаритамската равенка.

Проверка: За $x = 5$ имаме $\lg(3 \cdot 5 - 2 - 2 \cdot 5^2) = \lg(5^2 - 10 \cdot 5 - 12)$, односно $\lg(-37) = \lg(-37)$, што не постои.

За $x = -\frac{2}{3}$ имаме $\lg\left\{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\} = \lg\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 12\right\}$, односно $\lg\left(-\frac{44}{9}\right) = \lg\left(-\frac{44}{9}\right)$, што не постои.

Според тоа, дадената логаритамска равенка нема реални решенија. ♦

III. Решавање на равенки кои се сведуваат на равенки од видот $\log_a f(x) = b$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Задача 4. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x-3) + \log_3(2x+1) = 2$ **б)** $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x-3)$

в) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$.

Решение. а) Според правилото за логаритам од производ следува дека дадената равенка $\log_3(x-3) + \log_3(2x+1) = 2$ е еквивалентна со равенката $\log_3(x-3) \cdot (2x+1) = 2$. Решенијата на последната равенка се добиваат со решавање на квадратната равенка $2x^2 - 5x - 12 = 0$. Како што веќе рековме, не сите решенија на квадратната равенка $x_1 = 4$ и $x_2 = -\frac{3}{2}$ се решенија на логаритамската равенка. Со непосредна проверка на добиените решенија, односно со замена за $x = 4$, а потоа за $x = -\frac{3}{2}$, добиваме дека дадената равенка има само едно решение $x = 4$.

б) Според правилото за логаритам од количник следува дека дадената равенка е еквивалентна со равенката $\log_5(x^2 - 6x + 7) - \log_5(x-3) = 0$, односно на равенката $\log_5 \frac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 0$. Решенијата на последната равенка се добиваат со решавање на равенката $\frac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 1$, $x \neq 3$, која што е еквивалентна со равенката $x^2 - 7x + 10 = 0$ чии решенија се $x_1 = 5$ и $x_2 = 2$. Со непосредна проверка на добиените решенија, односно со замена за $x = 5$, а потоа за $x = 2$, заклучуваме дека равенката има само едно решение $x = 5$.

в) Равенката $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$ со смената $\sqrt{\lg 2x} = t$ се сведува на квадратната равенка $t^2 + 3t - 4 = 0$, чии што решенија се $t_1 = 1$ и $t_2 = -4$. Согласно воведената смена имаме $\sqrt{\lg 2x} = 1$, односно $\lg 2x = 1$. Оттука $2x = 10$, односно

$x = 5$. Бидејќи равенката $\sqrt{\lg 2x} = -4$ нема решение, заклучуваме дека равенката има само едно решение $x = 5$. ♦

Задача 5. Реши ги равенките:

а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

б) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$.

Решение. а) Според правилата за логаритмирање имаме дека

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \frac{7}{4} \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$$

$$\text{Проверка: } \log_{16} 16 + \log_4 16 + \log_2 16 = 7$$

Решение на равенката е $x = 16$.

б) Според правилата за логаритмирање имаме дека $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{3^2} x + \frac{1}{\log_3 x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2 \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2 \log_3 x + 1 = 0$$

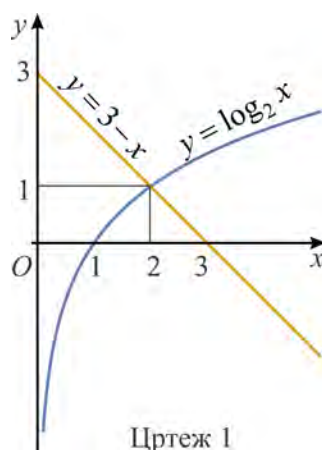
Со смената $\log_3 x = t$ ја добиваме равенката $t^2 - 2t + 1 = 0$ чие што решение е $t = 1$. Оттука имаме дека $\log_3 x = 1$, односно $x = 3$.

$$\text{Проверка: } \log_9 3 + \log_9 3 = 1 \Leftrightarrow 2 \log_9 3 = 1 \Leftrightarrow \log_9 9 = 1$$

Решение на равенката е $x = 3$. ♦

Задача 6. Реши ја равенката $\log_2 x = 3 - x$.

Решение. Дадената равенката може да се реши графички. Левата страна на равенката е логаритамска функција $y = \log_2 x$, а десната страна е линеарната функција $y = 3 - x$. На ист координатен систем ги цртаме графиците на двете функции (цртеж 1). Графиците се сечат во една точка M . Од точката M спуштаме нормала на x -оската и го читаме решението на равенката $\log_2 x = 3 - x$ кое е $x = 2$. ♦



Задачи

Решете ги равенките:

1. $\log_{\sqrt{3}}(2x^2 - 6) = 2$. 2. $\log_3(x^2 - 5x + 7) = 1$. 3. $\log_2(x - 1) + \log_2 x = 1$.

4. $\lg(3x - 1) + \lg(12 - x) = 2$. 5. $\log_x 2 - \log_x 3 = 4$. 6. $\log_2 x - \log_{16} x = 3$.

7. $\log_3(1 + \log_3(2x - 7)) = 1$.

Решете ги графички равенките:

8. $\log_2 x = x - 1$.

9. $\lg x = x^2$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Со користење на дефиницијата за логаритам, најди го бројот x , ако:

а) $\log_x 16 = 2$

б) $\log_x 27 = -\frac{3}{4}$

в) $\log_x 1000 = -3$

г) $\log_x 7 = \frac{1}{3}$

д) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

ѓ) $\log_x 27 = \frac{1}{3}$

е) $\log_{100} x = 0,2$

ж) $\log_{\frac{1}{3}} x = 8$

з) $\log_{125} x = -\frac{2}{3}$.

2. Логаритмирај ги следниве изрази:

а) $2xy$

б) $3x^2y^2$

в) $x^2y^5\sqrt{z}$

г) $a^{\sqrt{b}} \cdot c^3$

д) $6x\sqrt[3]{y^2}$

ѓ) $\sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y}}}$

е) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{y}}}$.

3. Најди го бројот x ако е познат неговиот логаритам.

а) $\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 2$

б) $\lg x = \lg 5 + \frac{1}{2}(\lg 8 - \lg 2)$

в) $\log x = \log 7 + \log 9 - \log 3$

г) $\log x = 2\log 3 + 3\log 5$

д) $\log x = \frac{1}{3}\log 125 - (\log 3 + 2\log \sqrt{3})$.

4. Со примена на логаритам, пресметај ја вредноста на изразите:

а) $x = \frac{333,648 \cdot 2,49}{125,36}$

б) $x = \frac{43,5 \cdot 0,26^2}{6,38^3 \cdot 1,28}$

в) $x = 3,25^3 \cdot \sqrt[5]{54,21}$

г) $x = \frac{8,4 \cdot \sqrt[3]{729}}{3,24}$.

5. Смени ја основата на:

а) $\log_2 5$ со 4

б) $\log_3 7$ со $\sqrt{7}$

в) $\lg 5$ со 10^{-1} .

6. Упрости ги изразите, користејќи ги врските меѓу логаритмите со различни основи:

$$\text{a)} \frac{\log_{3^2} 25 + \log_3 7}{\log_3 \frac{5^2 \cdot 7^2}{3^2} + 2} \quad \text{б)} \log_2 \sqrt{x}(x+1) - \log_2 (x+1)^2 + \log_4 (x+1).$$

7. Пресметај ја вредноста на изразите:

$$\text{a)} \log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0,125 \quad \text{б)} \log_3 2 + \log_7 245 + \log_{12} 7 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{7}} 5 + \log_{\frac{1}{12}} 84.$$

8. Нацртај го графикот на функциите:

$$\text{a)} y = -\log_{\frac{1}{4}} x \quad \text{б)} y = -\log_4 x \quad \text{в)} y = \log_5 |x| \quad \text{г)} y = \left| \log_{\frac{1}{10}} x \right|.$$

9. Најди ги сите реални броеви за кои е дефиниран изразот:

$$\text{a)} \log_3 \left(2x - \frac{1}{2} \right) \quad \text{б)} \log_2 (x+1) \quad \text{в)} \log_{10} \frac{x+3}{x+1} \quad \text{г)} \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 5x + 6).$$

Реша ги равенките:

$$\text{10.} \lg x + \lg(x-3) = 1. \quad \text{11.} \log_3 x + \log_3 (x+2) = 1.$$

$$\text{12.} 7 \log_{25} x - \log_5 x = 5. \quad \text{13.} \log_{x-1} 3 = 2.$$

$$\text{14.} \log_5 (x-3) = \log_5 (x^2 - 5x - 10). \quad \text{15.} \log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}.$$

$$\text{16.} \log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6. \quad \text{17.} 1 + \log_2 (x-1) = \log_{(x-1)} 4.$$

$$\text{18.} \frac{2}{4 - \lg x} + \frac{1}{2 + \lg x} = 1.$$

20. Реша ги графички равенките:

$$\text{a)} \log_{\frac{1}{3}} x = x + 1 \quad \text{б)} \log_{\frac{1}{10}} x = x^2 + 1.$$

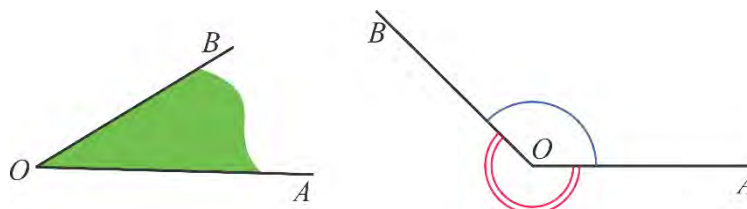
3. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

3.1. Мерење на агол. Проширување на поимот агол

Да се потсетиме на неколку дефиниции од рамнинска геометрија кои ги знаеш од претходно. Познато е дека две полуправи со заеднички почеток ја делат рамнината на два дела, а тие полуправи се јавуваат како граници на деловите.

Дефиниција 1. Унијата од полуправите со заеднички почеток и еден од деловите на рамнината се нарекува **агол**.

На цртеж 1 се претставени две полуправи $[OA)$ и $[OB)$ со заеднички почеток O . Полуправите се викаат **краци на аголот**, нивниот заеднички почеток O се вика **теме на аголот**, а множеството од сите негови точки што не лежат на краците се вика **внатрешна област на аголот**.



Цртеж 1

Полуправите $[OA)$ и $[OB)$ со заеднички почеток O одредуваат два агла, кои ги означуваме со $\angle AOB$ (или $\angle BOA$). Како ознака за агол се користи и некоја од грчките букви $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, па затоа може да ставиме $\angle AOB = \alpha$. Аголот $\angle AOB$ се нарекува **полн агол** ако полуправите $[OA)$ и $[OB)$ се совпаѓаат.

Постојат различни начини за изразување на големината на еден агол. Досега, како единица мерка за мерење агли најчесто го користевме **степенот**.

Еден степен (1°) е единица мерка за мерење агол која изнесува 360 дел од полниот агол. Помала единица мерка е **една минута ($1'$)** која изнесува 60 дел од еден степен и **една секунда ($1''$)** која изнесува 60 дел од една минута, односно 3600 дел од еден степен. Според тоа, имаме:

$$1^\circ = 60', 1' = 60'', 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \text{ и } 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ.$$

Со помош на овие равенства може да претвораме даден агол во децимален облик на степен и обратно.

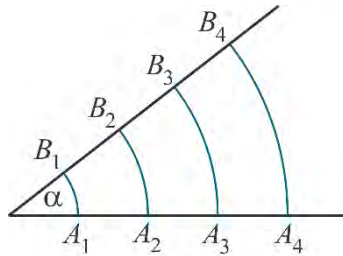
Пример 1. Аголот $23^\circ 34' 12''$ претворен во децимален облик на степен изнесува

$$23^\circ 34' 18'' = 23^\circ + \left(\frac{42}{60}\right)^\circ + \left(\frac{18}{3600}\right)^\circ = 23^\circ + 0,7^\circ + 0,005^\circ = 23,705^\circ$$

Пример 2. Аголот $47,512^\circ$ запишан во степени, минути и секунди изнесува

$$\begin{aligned} 47,512^\circ &= 47^\circ + 0,512^\circ = 47^\circ + (60 \cdot 0,512)' = 47^\circ 30,72' = 47^\circ 30' + 0,72' = \\ &= 47^\circ 30' + (60 \cdot 0,72)'' = 47^\circ 30' 43'' \end{aligned}$$

Во кружница на исти централни агли одговараат кружни лаци со иста должина и обратно, па големината на даден агол може да се изрази и поинаку. На цртеж 2 може да забележиме дека во кружници со различен радиус на ист централен агол му одговараат кружни лаци со различна должина која е пропорционална со големината на соодветните радиуси.



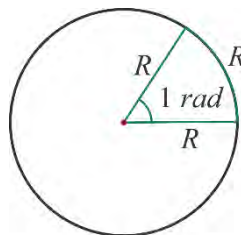
Цртеж 2

Дефиниција 2. Големината на централниот агол во кружница чиј соодветен кружен лак има должина еднаква на должината на радиусот на таа кружница изнесува **еден радијан** и се означува со $1rad$.

Според дефиницијата следува дека кај полниот агол кој е централен агол на целата кружница со радиус R соодветниот кружен лак има должина $2R\pi$ т.е. големината на аголот изнесува $2\pi rad$. Од друга страна тој агол има 360° , па со изедначување се добива $360^\circ = 2\pi rad$. Од тука се добива дека

$$1rad = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ \approx 57^\circ 17' 45'',$$

односно $1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \approx 0,01745 rad$ (Цртеж 3).



Цртеж 3

Пример 3. Дадените агли, запишани во радијани се:

а) $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} rad = \frac{\pi}{6} rad$,

б) $34^\circ 12' = 34^\circ + \left(\frac{12}{60}\right)^\circ = 34,2^\circ = 34,2 \cdot \frac{\pi}{180} rad = 0,19\pi rad$.

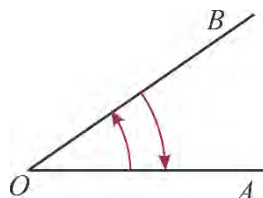
Пример 4. Дадените агли, запишани во степени се:

а) $\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ,$

б) $0,48\pi \text{ rad} = 0,48\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 86,4^\circ = 86^\circ 24'.$

Забелешка. Во иднина доколку кај некој агол отсутствува ознака за мерна единица, ќе сметаме дека тој е зададен во радијани.

Аголот $\angle AOB$ може да го разгледаме како фигура која се добива со ротација на едниот од краците околу темето O (Цртеж 4). Ако кракот OA го фиксираме во рамнината, а ја набљудуваме ротацијата на кракот OB со центар во точката O , тогаш станува збор за **ориентиран** или **насочен агол**. Аголот има позитивна насока кога ротацијата е во насока спротивна од движењето на стрелките на часовникот, а негативна насока, кога ротацијата е иста со движењето на стрелките на часовникот. Ќе се договориме кракот OA да го викаме **прв крак**, а тој што ротира т.е. кракот OB -**втор крак**. Веламе дека $\angle AOB$ е **позитивен агол**, а $\angle BOA$ е **негативен агол** и уште тој е **спротивен** на $\angle AOB$.

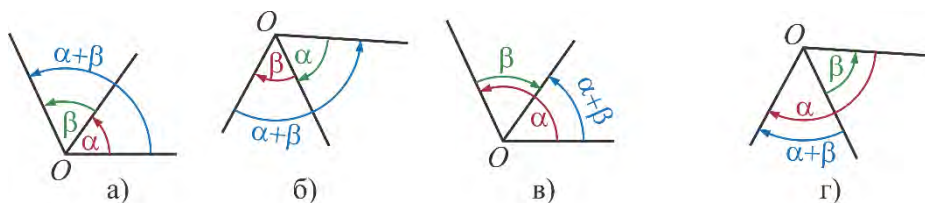


Цртеж 4

Операции со ориентиран агли

Збирот на два ориентиран агли α и β е агол $\alpha + \beta$ кој се добива кога на вториот крак на аголот α ќе го нанесеме првиот крак на аголот β и ако:

- α и β имаат иста насока, тогаш $\alpha + \beta$ има иста насока со нив (Цртеж 5, а) и б))
- α е позитивен, а β негативен и α има поголема апсолутна вредност од β т.е. $|\alpha| > |\beta|$, тогаш $\alpha + \beta$ има позитивна насока и големина $\alpha - \beta$ (Цртеж 5, в))
- α е негативен, а β позитивен и α има поголема апсолутна вредност од β т.е. $|\alpha| > |\beta|$, тогаш $\alpha + \beta$ има негативна насока и големина $|\alpha + \beta|$ (Цртеж 5, г))



Цртеж 5

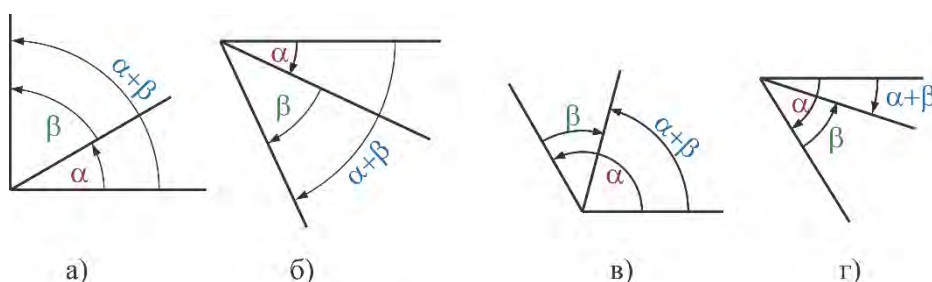
Пример 5. На цртеж 6 е скициран збирот $\alpha + \beta$, каде:

а) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$

б) $\alpha = -25^\circ, \beta = -40^\circ$

в) $\alpha = 120^\circ, \beta = -45^\circ$

г) $\alpha = -58^\circ, \beta = 30^\circ$



Цртеж 6

Разликата на два ориентиран агли $\alpha - \beta$ е всушност збирот на аголот α со спротивниот агол на β т.е. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Пример 6. Вредноста на $\alpha - \beta = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$ е агол со иста насока како и аголот $\alpha = 50^\circ$.

Производот на реалниот број $k \neq 0$ и ориентираниот агол α е агол со големина $|k| \cdot |\alpha|$ и насока иста со насоката на аголот α , за $k > 0$, а спротивна за $k < 0$.

Пример 7. Производот $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ е агол со иста насока како и $\alpha = 60^\circ$, а $-2 \cdot 45^\circ = -90^\circ$ е агол со спротивна насока со $\alpha = 45^\circ$.

Ако вториот крак на еден агол α направи полна ротација и потоа продолжи со ротација, тогаш се добива агол β поголем од 360° при ротација за агол со позитивна насока, односно помал од -360° , при ротација за агол со негативна насока. Во тој случај велиме дека вториот крак на аголот опишал одреден **воопштен агол** β .

Воопштениот агол ќе го запишеме во **општ вид** на следниот начин:

$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$, за $0 \leq \alpha < 360^\circ$ или $\beta = \alpha + k \cdot 2\pi$, за $0 \leq \alpha < 2\pi$ и $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, за β позитивен агол

$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$, за $-360^\circ < \alpha \leq 0$ или $\beta = \alpha + k \cdot 2\pi$, за $-2\pi < \alpha \leq 0$ и $k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, за β негативен агол

Притоа k го означува бројот на завртувања (полни ротации) во позитивна или негативна насока.

Пример 8. Аголот кој се добива од $\alpha = 30^\circ$ после три полни ротации во позитивна насока има општ вид и изнесува $\alpha + 3 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 1080^\circ = 1110^\circ$, додека пак, аголот кој се добива од $\alpha = -30^\circ$ после две полни ротации во негативна насока има општ вид и изнесува $\alpha - 2 \cdot 360^\circ = -30^\circ - 720^\circ = -750^\circ$.

Задача 1. Запиши ги во општ вид аглите:

а) 1250°

б) -760°

в) 9π

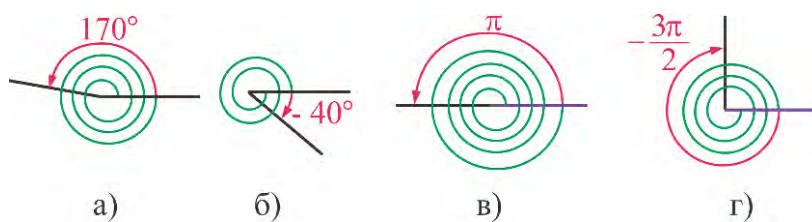
г) $-\frac{15\pi}{2}$

Решение. а) $1250^\circ = 170^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, што значи дека аголот е добиен од аголот од 170° со три полни завртувања во позитивна насока,

б) $-760^\circ = -40^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$, што значи дека аголот е добиен од аголот од -40° со две полни завртувања во негативна насока,

в) $9\pi = \pi + 4 \cdot 2\pi$ заклучуваме дека овој агол е добиен од аголот од π радијани со четири полни завртувања во позитивна насока

г) $-\frac{15\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 7\pi = -\frac{\pi}{2} - \pi - 3 \cdot 2\pi = -\frac{3\pi}{2} + (-3) \cdot 2\pi$ заклучуваме дека овој агол е добиен од аголот од $-\frac{3\pi}{2}$ радијани со три полни завртувања во негативна насока.



Цртеж 7

Задачи

1. Дадените агли запиши ги во радијани:

а) 120° б) -270° в) 0°

2. Дадените агли запиши ги во степени:

а) $\frac{3\pi}{4}$ б) $-\frac{7\pi}{8}$ в) 10

3. Запиши ги во општ вид аглите:

а) 1100° б) -680° в) $-\frac{19\pi}{3}$

4. Колкав агол опишува минутната стрелка на часовникот за време од 12 часот на пладне до 20 часот и 10 минути, попладне?

3.2. Дефиниција на тригонометриски функции од произволен агол

Минатата година учеше за тригонометриските функции од остар агол во правоаголен триаголник. Тригонометриските функции од произволен агол ги дефинираме со помош на тригонометриска кружница.

Дефиниција 1. Кружница со радиус 1, чијшто центар е во координатниот почеток, се вика **тригонометриска кружница** (цртеж 1).

Темето на аголот $\angle AOB$ се совпаѓа со координатниот почеток, првиот крак OA лежи на позитивниот дел на x -оската. Вториот крак OB е кракот кој ротира со центар во O . Положбата на тој крак ја одредува положбата на аголот $\angle AOB$. Имено, во кој квадрант е аголот $\angle AOB$ зависи од тоа во кој квадрант е

кракот OB и обратно. Аглите чиј втор крак се совпаѓа со оските се викаат **квадрантни агли**.

Пример 1. Аголот $\angle AOB = 200^\circ$ е во III квадрант, бидејќи кракот OB е во тој квадрант, додека пак $\angle AOB = -300^\circ$ е во I квадрант, бидејќи кракот OB е во тој квадрант.

Задача 1. Во кој квадрант е аголот α , ако:

- а) $\alpha = -130^\circ$ б) $\alpha = 750^\circ$ в) $\alpha = -460^\circ$ г) $\alpha = 1250^\circ$.

Решение. а) $\alpha = -130^\circ = 230^\circ + (-360^\circ)$, па α е во III квадрант,

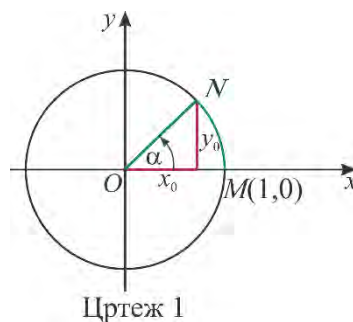
б) $\alpha = 750^\circ = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, па α е во I квадрант

в) $\alpha = -460^\circ = 260^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$, па α е во III квадрант

г) $\alpha = 1250^\circ = 150^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, па α е во II квадрант. ♦

Нека α е произволен агол $\angle MON$ со прв крак OM . Ако (x_0, y_0) се координатите на точката N , тогаш вредностите на тригонометриските функции **косинус** и **синус** од аголот α се дефинираат како вредности на апсцисата, односно ординатата на точката N , соодветно (цртеж 1), или

$$\cos \alpha = x_0 \quad \text{и} \quad \sin \alpha = y_0.$$

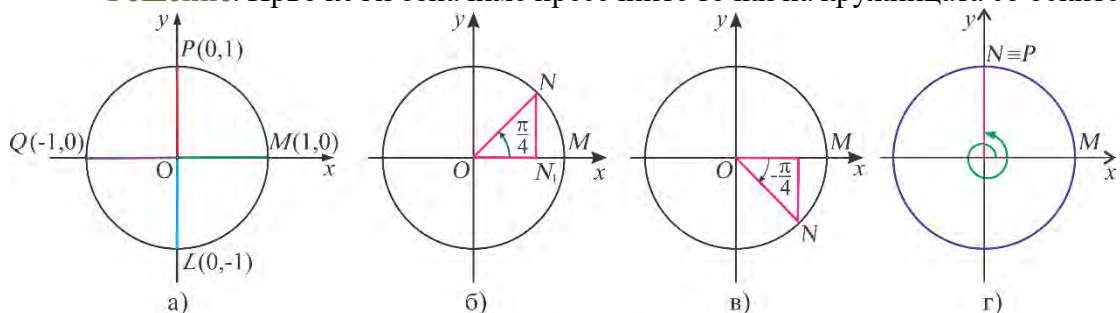


Од дефиницијата за функциите синус и косинус следува дека нивните вредности се движат во интервалот $[-1, 1]$.

Задача 2. Одреди ја вредноста на функциите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ ако:

- а) $\alpha = 0$ б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в) $\alpha = \pi$ г) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$
 д) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ е) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ж) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$.

Решение. Прво ќе ги означиме пресечните точки на кружницата со оските



Цртеж 2

а) Точката N се совпаѓа со точката $M(1,0)$, па $\cos 0^\circ = 1$ и $\sin 0^\circ = 0$ (црт. 2а).

б) Точката N се совпаѓа со точката $P(0,1)$, па $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (цртеж 2а).

в) Точката N се совпаѓа со точката $Q(-1,0)$, па имаме $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ (црт. 2а).

г) Точката N се совпаѓа со точката $L(0,-1)$, па имаме $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ (црт. 2а).

д) Триаголникот ON_1N е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето N_1 . Од $\overline{ON} = 1$ следува дека $\overline{ON_1} = \overline{NN_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, или $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (цртеж 2б).

ѓ) Точката $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, па според тоа

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (цртеж 2в).}$$

е) Точката N се совпаѓа со точката $P(0,1)$, па

$$\cos \frac{5\pi}{2} = 0 \text{ и } \sin \frac{5\pi}{2} = 1 \text{ (цртеж 2г).} \blacklozenge$$

Бидејќи функциите синус и косинус ги дефинираме само преку координатите на пресечната точка на вториот крак на аголот со тригонометриската кружница следува дека

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \text{ и } \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \text{ за } k \in \mathbb{Z}.$$

Лесно се забележува дека после секое полно завртување (во позитивна или негативна насока), вториот крак на аголот се враќа во почетната положба т.е. вредностите на синус и косинус се повторуваат. Ваквото својство на тригонометриските функции се нарекува периодичност, а најмалиот агол за кој се постигнува иста вредност на функциите се вика основен период. За функциите синус и косинус од произволен агол тој е 2π , т.е. веламе дека тие се периодични со основен период 2π .

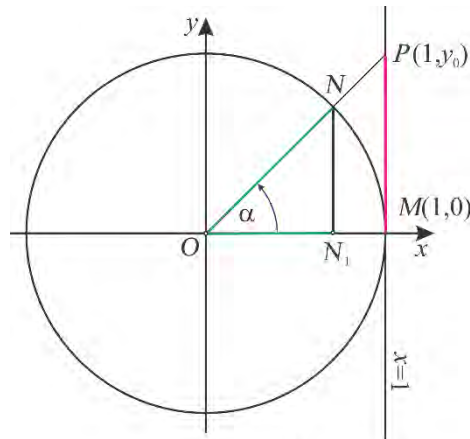
Нека $\angle MON = \alpha$ е произволен агол со прв крак OM . Ако (x_0, y_0) се координатите на точката N , тогаш вредностите на тригонометриските функции **тангенс** и **котангенс** од аголот α се дефинираат како количник од ординатата и апсцисата и обратно, земени од точката N , соодветно (цртеж 1), т.е.

$$tg\alpha = \frac{y_0}{x_0}, \text{ за } x_0 \neq 0 \text{ и } ctg\alpha = \frac{x_0}{y_0}, \text{ за } y_0 \neq 0.$$

Вредноста $tg\alpha$, за произволен агол α , на тригонометриската функција тангенс може геометриски да се определи на следниов начин: правата $x=1$ која минува низ точката M и е паралелна со y -оската, е тангента на тригонометриската кружница и се нарекува **тангенсна оска**. Ако вториот крак на аголот α , $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, каде што $k \in \mathbb{Z}$ го продолжиме до пресек со тангенсната

оска, ја добиваме точката P (цртеж 3). Координатите на точката P се $(1, y_0)$, па според дефиницијата $\operatorname{tg} \alpha = y_0$.

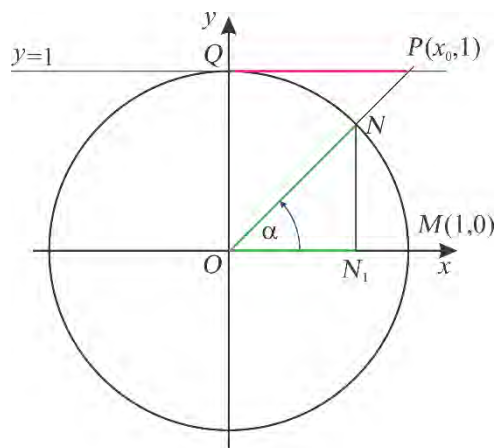
Навистина, ако $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и ако со N_1 ја означиме нормалната проекција на точката N на x -оската, тогаш $\overline{ON_1} = \cos \alpha$ и $\overline{NN_1} = \sin \alpha$. Од сличноста на триаголниците OMP и ON_1N следува дека $\frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{NN_1}}{\overline{ON_1}}$. Бидејќи $\overline{MP} = y_0$ и $\overline{OM} = 1$, добиваме дека $y_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.



Цртеж 3

Тригонометриската функција котангенс од произволен агол α се одредува аналогно како и функцијата тангенс. Правата $y=1$ која минува низ точката $Q(0,1)$ е паралелна со x -оската. Таа е тангентата на тригонометриската кружница и се вика **котангенсна оска** (цртеж 4). Нека вториот крак на аголот α за $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ го продолжиме до пресек со котангенсната оска во точка $P(x_0, 1)$. Тогаш од дефиницијата на котангенс се добива дека $\operatorname{ctg} \alpha = x_0$. Аналогно, од сличноста на триаголниците PQO и ON_1N се добива

$$x_0 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

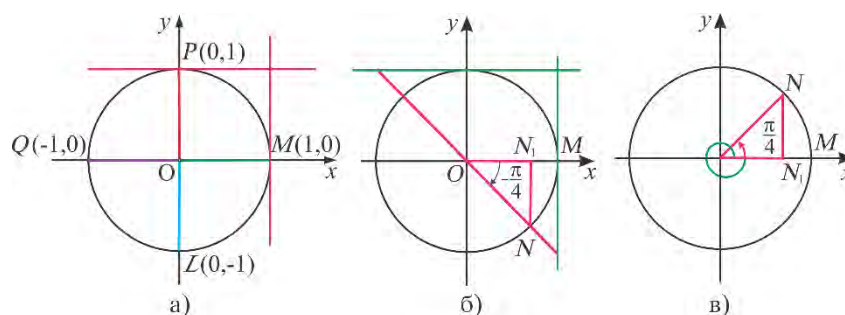


Цртеж 4

Задача 3. Одреди ја вредноста на функциите $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ ако:

- а) $\alpha = 0$ б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$
 г) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$ д) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ё) $\alpha = \pi$

Решение. Прво ќе ги означиме пресечните точки на кружницата со оските (цртеж 5 а))



Цртеж 5

а) Точката N се совпаѓа со точката $M(1,0)$, па $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ не постои бидејќи вториот крак на аголот и котангесната оска се паралелни т.е. немаат пресек (цртеж 5 а)).

б) Точката N се совпаѓа со точката $P(0,1)$, па $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не постои бидејќи вториот крак на аголот и тангесната оска се паралелни т.е. немаат пресек, а $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ (цртеж 5 а))

в) Триаголникот ONN_1 е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето N_1 . Од $\overline{ON} = 1$ следува дека $\overline{ON_1} = \overline{NN_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ и $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ (цртеж 5 б)).

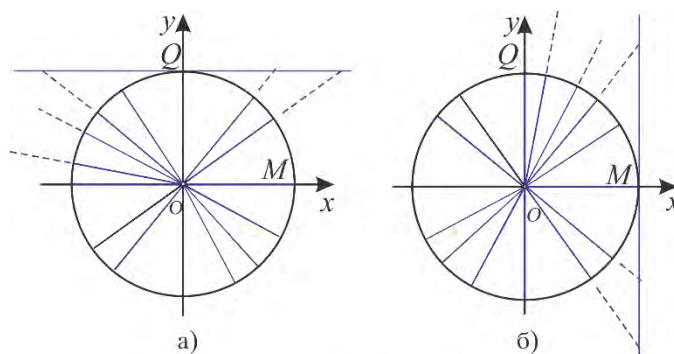
г) Аголот $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ што значи дека тој е во првиот квадрант, а од в) се добива дека $N(1,1)$, па $\operatorname{tg} \left(\frac{9\pi}{4}\right) = 1 = \operatorname{ctg} \left(\frac{9\pi}{4}\right)$ (цртеж 5 в)).

д) Точката N се совпаѓа со точката $L(0,-1)$, па $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ не постои, а $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (цртеж 5 а))

ё) Точката N се совпаѓа со точката $Q(-1,0)$ па $\operatorname{tg} \pi = 0$, а $\operatorname{ctg} \pi$ не постои (цртеж 5 а)). ♦

Тангенсот не постои за сите агли за кои вториот крак е паралелен со тангенсната оска т.е. $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, за $k \in \mathbb{Z}$, а котангенс не постои за сите агли

за кои вториот крак е паралелен со котангенсната оска т.е. $\alpha = k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$. Може да забележиме дека вториот крак или неговото продолжение за агол од третиот квадрант се совпаѓа со вториот крак на агол од првиот квадрант. Слично важи за аглите од вториот и четвртиот квадрант, па, следува дека $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$ за $k \in \mathbb{Z}$. Аналогно може да се заклучи и за котангенс, т.е. важи $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha$ за $k \in \mathbb{Z}$ (цртеж 6, а) и б)). Според функциите тангенс и котангенс се периодични со основен период π .



Цртеж 6

Задачи

1. Одреди во кој квадрант е аголот α , ако:

а) $\alpha = -210^\circ$ б) $\alpha = -2500^\circ$ в) $\alpha = -\frac{4\pi}{5}$

2. Одреди ги вредностите на сите тригонометриски функции за аголот α , ако:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ б) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ в) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ г) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$
 д) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ е) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ ж) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ з) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

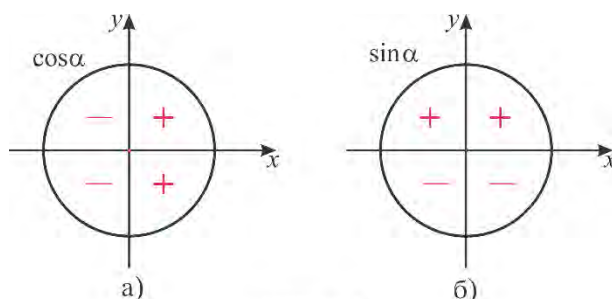
3. Одреди ги вредностите на сите тригонометриски функции за аголот $-\alpha$ од задача 2.

3.3. Знак на тригонометриски функции од произволен агол. Менување на тригонометриски функции од произволен агол

Познато е дека точките во првиот и вториот квадрант имаат втора координата со позитивен знак, а во третиот и четвртиот квадрант имаат втора координата со негативен знак. Слично, точките од првиот и четвртиот квадрант имаат прва координата со позитивен знак, а во вториот и третиот квадрант имаат прва координата со негативен знак. Според тоа, од дефиницијата на тригонометриските функции може да заклучиме дека:

- функцијата синус има позитивен знак за секој агол од првиот и вториот квадрант, а негативен знак за секој агол од третиот и четвртиот квадрант
- функцијата косинус има позитивен знак за секој агол од првиот и четвртиот квадрант, а негативен знак за секој агол од вториот и третиот квадрант (цртеж 1)

- функцијата тангенс има позитивен знак за секој агол од првиот и третиот квадрант, а негативен знак за секој агол од вториот и четвртиот квадрант
- функцијата котангенс има позитивен знак за секој агол од првиот и третиот квадрант, а негативен знак за секој агол од вториот и четвртиот квадрант



Цртеж 1

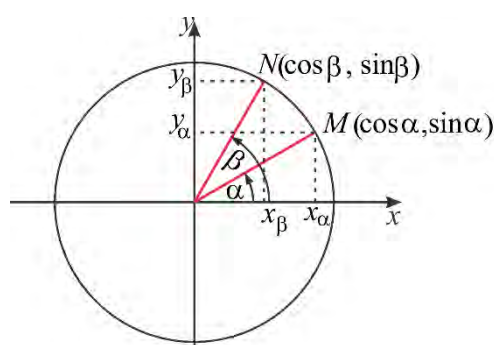
Задача 1. Одреди го знакот на:

- а) $\sin 120^\circ$ б) $\cos 200^\circ$ в) $\operatorname{tg} 225^\circ$ г) $\operatorname{ctg} 310^\circ$ д) $\sin 40^\circ \cdot \cos 98^\circ$

Решение. а) Аголот 120° е во вториот квадрант, па $\sin 120^\circ > 0$, б) 200° е агол во третиот квадрант, па $\cos 200^\circ < 0$, в) $\operatorname{tg} 225^\circ > 0$, бидејќи 225° е агол во третиот квадрант, г) $\operatorname{ctg} 310^\circ < 0$, бидејќи 310° е агол од четвртиот квадрант, д) 40° е агол од првиот квадрант, па $\sin 40^\circ > 0$, а 98° е агол од вториот квадрант и $\cos 98^\circ < 0$ од каде следува дека $\sin 40^\circ \cdot \cos 98^\circ < 0$.

Дефиниција 1. Функцијата $f(x)$ монотонно расте на множеството A , ако за секои $x_1, x_2 \in A$ такви што од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) < f(x_2)$. Функцијата $f(x)$ монотонно опаѓа на множеството A , ако за секои $x_1, x_2 \in A$ такви што од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) > f(x_2)$.

Нека $\alpha < \beta$ и α и β се агли од првиот квадрант (цртеж 2).

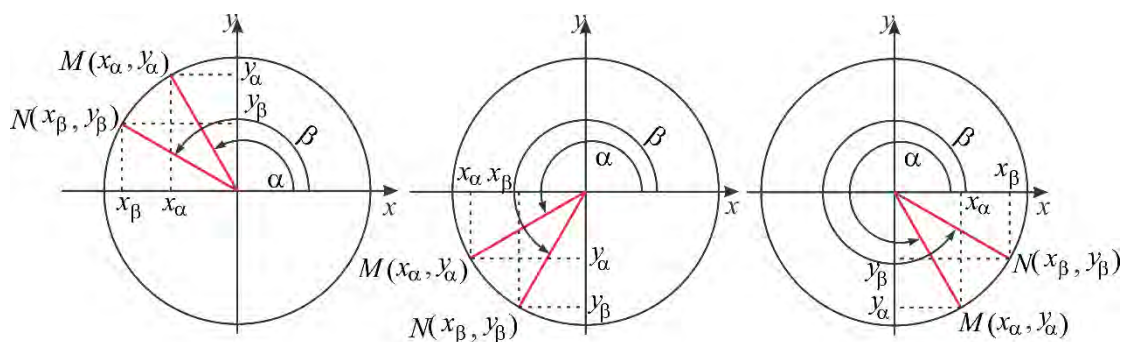


Цртеж 2

Од дефиницијата на функциите синус и косинус од произволен агол имаме: $\sin \alpha = x_\alpha$, $\cos \alpha = y_\alpha$, $\sin \beta = x_\beta$ и $\cos \beta = y_\beta$. Со споредување на должините лесно се заклучува дека $x_\alpha > x_\beta$ и $y_\alpha < y_\beta$ т.е. $\cos \alpha > \cos \beta$ и $\sin \alpha < \sin \beta$, односно функцијата синус монотонно расте, а косинус монотонно

опаѓа, кога аголот се зголемува во множеството $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Вредностите кои притоа ги прима функцијата синус се зголемуваат т.е. се движат од вредност 0 до 1. Вредностите на функцијата косинус се намалуваат т.е. се движат од 1 до 0.

На сличен начин изведуваме заклучок за монотоноста на функциите во останатите квадранти (цртеж 3). Конечно може да кажеме дека функцијата синус монотонно расте во првиот и четвртиот квадрант, а опаѓа во вториот и третиот квадрант. Функцијата косинус опаѓа во првиот и вториот квадрант, а расте во третиот и четвртиот квадрант.



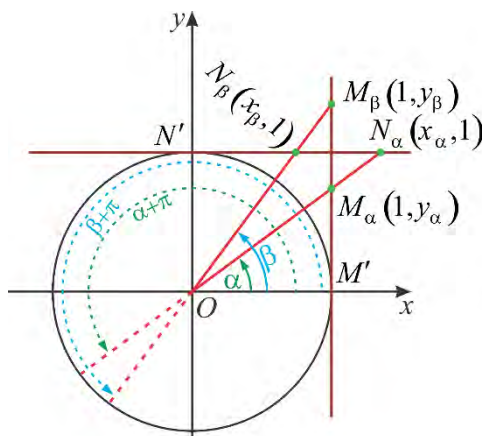
Цртеж 3

Нека $\alpha < \beta$ и α и β се агли од првиот квадрант (цртеж 4).

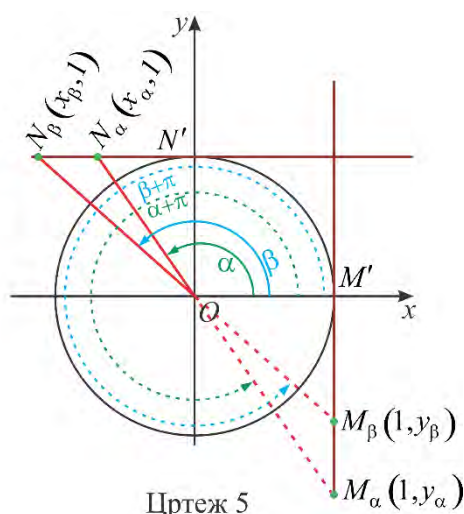
Од дефиницијата на тригонометриските функции тангенс и котангенс од произволен агол имаме $\operatorname{tg} \alpha = y_\alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha = x_\alpha$, $\operatorname{tg} \beta = y_\beta$ и $\operatorname{ctg} \beta = x_\beta$. Очигледно $y_\beta > y_\alpha$ и $x_\alpha > x_\beta$ т.е. функцијата тангенс монотонно расте, а котангенс монотонно опаѓа, кога аголот се зголемува во множеството $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Овој заклучок ќе важи и

за агли од третиот квадрант бидејќи за тие агли продолжението на вториот крак им се совпаѓа со вториот крак на агли од првиот квадрант.

На сличен начин се одредува монотоноста на овие функции за агли од вториот, односно четвртиот квадрант (Цртеж 5).



Цртеж 4



Цртеж 5

Во вториот квадрант функцијата тангенс монотонно расте, а котангенс монотонно опаѓа. Ова тврдење важи и за аглие од четвртиот квадрант бидејќи продолжението на вториот крак кај тие агли се совпаѓа со вториот крак на аглие од вториот квадрант.

Задача 2. Одреди го знакот на разликата:

- а) $\sin 95^\circ - \sin 115^\circ$ б) $\cos 190^\circ - \cos 230^\circ$
 в) $\operatorname{tg} 312^\circ - \operatorname{tg} 345^\circ$ г) $\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 74^\circ$.

Решение. а) Аглие 95° и 115° припаѓаат во вториот квадрант каде функцијата синус монотонно опаѓа, па од $95^\circ < 115^\circ$ следува дека $\sin 95^\circ > \sin 115^\circ$ т.е. $\sin 95^\circ - \sin 115^\circ > 0$,

б) $\cos 190^\circ - \cos 230^\circ < 0$, бидејќи функцијата косинус монотонно расте во третиот квадрант т.е. од $190^\circ < 230^\circ$ следува дека $\cos 190^\circ < \cos 230^\circ$,

в) $\operatorname{tg} 312^\circ - \operatorname{tg} 345^\circ < 0$ бидејќи функцијата тангенс монотонно расте во четвртиот квадрант

г) $\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 74^\circ > 0$, бидејќи функцијата котангенс монотонно опаѓа во првиот квадрант.

Задачи

1. Одреди го знакот на:

- а) $\cos 120^\circ$ б) $\sin 200^\circ$ в) $\operatorname{tg} 125^\circ$ г) $\operatorname{ctg} 130^\circ$.

2. Одреди го знакот на:

- а) $\sin 140^\circ \cdot \cos 198^\circ$ б) $\operatorname{tg} 190^\circ \cdot \cos 208^\circ$ в) $\sin 230^\circ \cdot \operatorname{ctg} 300^\circ$.

3. Во кој квадрант е аголот α , ако:

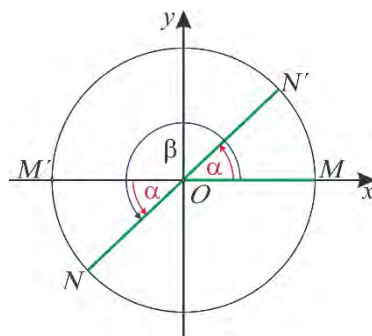
- а) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ б) $\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha < 0$

3.4. Сведување на тригонометриски функции од произволен агол на тригонометриски функции од остар агол

Пред да се запознаеме со формулите со чија помош ќе вршиме сведување на тригонометриските функции, да се потсетиме на вредностите на тригонометриските функции од некои остри агли во правоаголен триаголник.

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$



Цртеж 2

Бидејќи аголот β може да го запишеме како $\beta = \pi + \alpha$, ги добиваме формулите:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$. Со помош на овие формули ќе вршиме сведување на агол од третиот квадрант на агол од првиот квадрант.

Задача 2. Со сведување на остар агол пресметај:

а) $\sin \frac{5\pi}{4}$

б) $\cos 202^\circ$

в) $\operatorname{tg} 200^\circ$

г) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$.

Решение. а) $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$

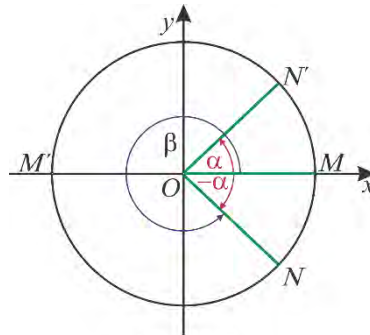
б) $\cos 202^\circ = \cos(180^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \approx -0,92718,$

в) $\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 20^\circ) = \operatorname{tg} 20^\circ \approx 0,36997$

г) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}. \blacklozenge$

Нека β е агол во четвртиот квадрант (цртеж 3). Претпоставуваме дека точката N има координати $(x_0, -y_0)$. Да ја означиме со N' симетричната точка на точката N во однос на x -оската. Точката N' е во I квадрант и има координати (x_0, y_0) . Ако $\alpha = \angle MON'$, тогаш од симетрија добиваме $\alpha = \angle MON$. Оттука имаме:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= -y_0 = -(y_0) = -\sin \alpha, \quad \cos \beta = x_0 = \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$



Цртеж 3

Бидејќи аголот β може да се запише како $\beta = 2\pi - \alpha$, ги добиваме формулите:

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(2\pi - \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Со помош на овие формули ќе вршиме сведување на агол од четвртиот квадрант на агол од првиот квадрант.

Задача 3. Со сведување на остар агол пресметај:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 288^\circ & & \text{б) } \cos \frac{7\pi}{4} \\ \text{в) } \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} & & \text{г) } \operatorname{ctg} 359^\circ. \end{aligned}$$

Решение. а) $\sin 288^\circ = \sin(360^\circ - 72^\circ) = -\sin 72^\circ \approx -0,95106$,

$$\text{б) } \cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} 359^\circ = \operatorname{ctg}(360^\circ - 359^\circ) = \operatorname{ctg} 1^\circ \approx 57,290. \blacklozenge$$

Нека α е остар агол, т.е. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$. Тогаш формулите за

сведување на остар агол се

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

Ако се набљудува вредноста на синус од аглиите α и $360^\circ - \alpha$ лесно се забележува дека тие се симетрични во однос на x -оската, па имаат спротивни вредности т.е. $\sin \alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$. Познато е дека вториот крак на аголот $360^\circ - \alpha$ се совпаѓа со вториот крак на аголот $-\alpha$, значи важи $\sin(-\alpha) = \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$. Аналогно може да се заклучи дека $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$, додека пак $\cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Својствата $f(-x) = -f(x)$ и $f(-x) = f(x)$, за секој x се нарекуваат непарност и парност на функцијата, соодветно. Според тоа функциите синус, тангенс и котангенс се непарни, а косинус парна.

Минатата година учеше за тригонометриски функции од комплементни агли т.е. важат формулите

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

На сличен начин може да се добијат формули за сведување на тригонометриска функција кога аголот е $90^\circ + \alpha$, $270^\circ - \alpha$ и $270^\circ + \alpha$, а α е остар агол. Притоа секоја функција преминува во својата кофункција т.е. синус преминува во косинус, тангенс во котангенс и обратно.

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$	$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Задачи

1. Со сведување на остар агол пресметај:

а) $\cos \frac{290}{4} \pi$ б) $\sin \frac{219}{4} \pi$.

2. Со сведување на остар агол, одреди ја вредноста на:

а) $\sin 120^\circ$ б) $\sin 225^\circ$ в) $\sin 315^\circ$ г) $\cos 135^\circ$
 д) $\cos 240^\circ$ е) $\cos(-810^\circ)$ ж) $\operatorname{tg} 150^\circ$ з) $\operatorname{tg} 225^\circ$ и) $\operatorname{ctg} 210^\circ$ к) $\operatorname{ctg} 300^\circ$ л) $\operatorname{ctg} 570^\circ$.

3. Упрости ги изразите:

а) $\frac{\sin 750^\circ \cdot \cos 390^\circ \cdot \operatorname{tg} 1140^\circ}{\operatorname{ctg} 405^\circ \cdot \sin 1860^\circ \cdot \cos 780^\circ}$ б) $\frac{\cos \frac{17\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{17\pi}{4}}{\operatorname{ctg} \frac{10\pi}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{4} \cdot \sin \frac{8\pi}{3}}$.

4. Одреди ја вредноста на изразите:

а) $\sin 420^\circ \cdot \operatorname{tg} 390^\circ + \cos 300^\circ \cdot \operatorname{tg} 510^\circ$
 б) $\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-150^\circ)$
 в) $\sin 240^\circ \cdot \cos(-150^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 120^\circ$
 г) $\operatorname{tg} \frac{18\pi}{2} - \sin \frac{8\pi}{3} \cdot \sin \frac{15\pi}{2}$.

3.5. Упростување тригонометриски изрази

Минатата учебна година се запозна и со одредени равенства кои се точни за секој остар агол во правоаголен триаголник познати како основни тригонометриски идентитети т.е. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ и $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

Ако $N(x_0, y_0)$ е произволна точка од тригонометриската кружница која се добива како пресек на вториот крак на аголот α со кружницата, тогаш од Питагоровата теорема следува дека $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Од дефиницијата на тригонометриските функции синус и косинус се добива дека $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Од дефиницијата на функцијата тангенс следува дека $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0}$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, за $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогно се добива дека $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, за $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Со множење на двете последни равенства се добива дека

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1, \text{ за } \alpha \neq (k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Одреди ја вредноста на $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, ако $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Од $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ следува дека $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Од тоа што аголот α е во четвртиот квадрант функциите синус, тангенс и котангенс имаат негативен знак, односно имаме:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5},$$

од каде следува дека $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$. Од $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ се добива дека

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ т.е. } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}.$$

Пример 2. Одреди ја вредноста на $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, ако $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Од $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ се добива дека $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$. Ако основниот тригонометриски идентитет $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ го поделиме со $\cos^2 \alpha$, ќе се добие:

$$1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Според тоа $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2}} = -\frac{1}{\frac{25}{7}} = -\frac{7}{25}$, бидејќи α е агол од третиот

квадрант. Со замена во $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ се добива

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = -\frac{24}{25}.$$

Забелешка. Ако $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ го поделиме со $\sin^2 \alpha$, ќе се добие:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}. \end{aligned}$$

Со помош на равенствата $\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$, се

добиваат следните равенства

$$\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \text{ и } \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Задача 1. Упрости ги изразите:

а) $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

б) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$.

Решение.

а) $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

б) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 =$

$$= \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 4\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 4. \blacklozenge$$

Задача 2. Докажи го идентитетот:

а) $\sin(2\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

б) $1 - \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha) \right)^2 = -2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

Решение. Со трансформација на левата страна се добива:

а)

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) &= \\ &= -\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\operatorname{tg} \alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} 1 - \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha) \right)^2 &= 1 - (-\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \\ &= 1 - (1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha) = -2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Задачи

1. Нека $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Најди ја вредноста:

а) $\sin \alpha$, ако $\cos \alpha = -0,6$ б) $\sin \alpha$, ако $\operatorname{ctg} \alpha = -2$.

2. Нека $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Најди ја вредноста:

а) $\cos \alpha$, ако $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ б) $\operatorname{tg} \alpha$, ако $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$.

3. Упрости ги изразите:

а) $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ б) $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)$ в) $1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

4. Најди ја вредноста на преостанатите тригонометриски функции, ако:

а) $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ б) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

в) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

5. Упрости го изразот $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - \pi) - \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 2\pi)$

3.6. Графици на основните тригонометриски функции

Пред да преминеме кон скицирање на графиците на тригонометриските функции да се потсетиме дека во досегашното изучување на функциите, аглите беа изразени во степени или радијани.

Во продолжение ќе ги скицираме графиците на тригонометриските функции и ќе испитае некои од својствата на тие функции.

График на тригонометриската функција $y = \sin x$

Користејќи ги основните својства на тригонометриската функција $y = \sin x$ кои ги изучивме со помош на тригонометриската кружница, ќе го нацртаме нејзиниот график.

- Функцијата $y = \sin x$ е дефинирана за секој реален број x . Тоа значи дека секоја права паралелна на y -оската го сече графикот на функцијата во точно една точка.
- Функцијата $y = \sin x$ е ограничена, односно $-1 \leq \sin x \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Тоа значи дека нејзиниот график се наоѓа меѓу паралелните прави $y = -1$ и $y = 1$.
- Функцијата $y = \sin x$ е периодична со основен период 2π . Тоа значи дека е доволно да го нацртаме нејзиниот график во некој интервал со должина 2π , на пример, во интервалот $[-\pi, \pi]$. Преостанатиот дел од графикот на функцијата се добива со транслација по x -оската за $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

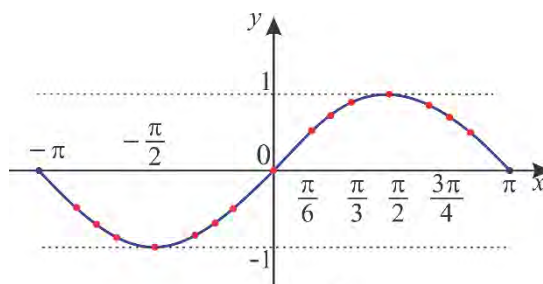
- Функцијата $y = \sin x$ е непарна, односно важи $\sin(-x) = -\sin x$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Тоа значи дека нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток, односно делот од графикот на функцијата во интервалот $[-\pi, 0]$ е симетричен во однос на координатниот почеток на делот од графикот на функцијата на интервалот $[\pi, 0]$.
- Нули на функцијата $y = \sin x$ за $x \in [0, \pi]$ се $x = 0$ и $x = \pi$. Тоа значи дека графикот на функцијата за $x \in [0, \pi]$ ја сече x -оската во точките $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$.
- Функцијата $y = \sin x$ е позитивна за $0 < x < \pi$. Тоа значи дека делот од графикот на функцијата за $x \in (0, \pi)$ е над x -оската.
- За $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x$ монотонно расте, а за $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, монотонно опаѓа.

Нејзината максимална вредност во интервалот $[0, \pi]$ е $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

За да го нацртаме графикот на функцијата синус на $[0, \pi]$ избираме повеќе агли од тој интервал, а потоа ја одредуваме вредноста на функцијата соодветна на големината на тие агли. Подредените парови точки ги нанесуваме во правоаголен координатен систем xOy .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

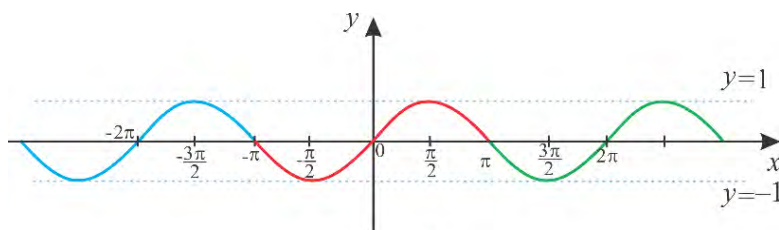
Имајќи предвид дека функцијата $y = \sin x$ е непарна, веднаш ги имаме и соодветните точки од графикот во интервалот $[-\pi, 0]$ (цртеж 1).



Цртеж 1

Функцијата $y = \sin x$ е растечка на интервалот $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и опаѓачка на интервалот $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Од непарноста следува дека графикот на интервалот $[-\pi, 0]$ е симетричен на графикот на интервалот $[0, \pi]$ во однос на координатниот почеток. Според тоа, графикот на функцијата $y = \sin x$ во интервалот $[0, \pi]$ го има обликот како на цртеж 1.

Ако земеме предвид дека функцијата $y = \sin x$ е периодична со период 2π , графикот на функцијата $y = \sin x$, за $x \in (-\infty, +\infty)$, се добива со транслација на нејзиниот график добиен во интервалот $[-\pi, \pi]$ по x -оската за $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Така за графикот на функцијата $y = \sin x$ добиваме една бесконечна крива која се нарекува **синусоида** (цртеж 2).



Цртеж 2

Од графикот на функцијата $y = \sin x$ може да ги прочитаеме нејзините основни својства:

- Функцијата е дефинирана на целата реална права.
- Функцијата е ограничена, односно $-1 \leq \sin x \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$.
- Функцијата е периодична со основен период 2π .
- Функцијата $y = \sin x$ е непарна, односно $\sin(-x) = -\sin x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.
- Функцијата има нули во точките $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата има максимална вредност $y_{\max} = 1$ за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

додека функцијата има минимална вредност $y_{\min} = -1$ за $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Функцијата монотонно расте за $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, а монотонно опаѓа за $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата е позитивна за $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, а функцијата е негативна за $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

График на тригонометриската функција $y = \cos x$

Слично, со цел да го нацртаме графикот на тригонометриската функција $y = \cos x$ ќе се потсетиме на својствата кои веќе ги изучивме.

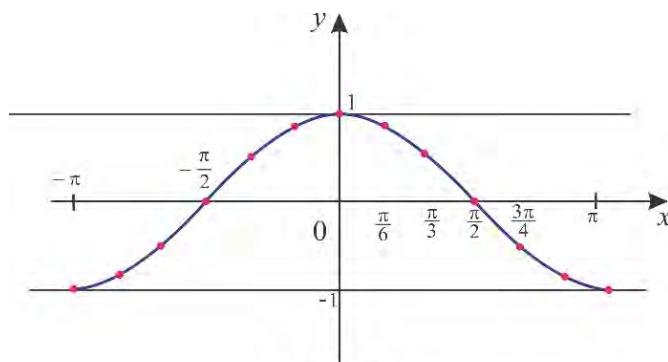
- Функцијата $y = \cos x$ е дефинирана за секој реален број x . Тоа значи дека секоја права паралелна на y -оската го сече графикот на функцијата во точно една точка.
- Функцијата $y = \cos x$ е ограничена, односно $-1 \leq \cos x \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Тоа значи дека нејзиниот график се наоѓа меѓу паралелните прави $y = -1$ и $y = 1$.

- Функцијата $y = \cos x$ е периодична со основен период 2π . Тоа значи дека е доволно да го нацртаме нејзиниот график во некој интервал со должина 2π , на пример, во интервалот $[-\pi, \pi]$. Преостанатиот дел од графикот на функцијата се добива со translација на нејзиниот график добиен во интервалот $[-\pi, \pi]$ по должината на x -оската за вектори со должина $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата $y = \cos x$ е парна, односно важи $\cos(-x) = \cos x$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Тоа значи дека нејзиниот график е симетричен во на однос y -оската т.е. дека делот од графикот на функцијата во интервалот $[-\pi, 0]$ е симетричен во однос на y -оската на делот од графикот на функцијата на интервалот $[\pi, 0]$.
- Функцијата $y = \cos x$ за $x \in [0, \pi]$ има нула за $x = \frac{\pi}{2}$. Тоа значи дека графикот на функцијата за $x \in [0, \pi]$ ја сече x -оската во точката $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- Функцијата $y = \cos x$ е позитивна за $0 < x < \frac{\pi}{2}$, а негативна за $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Тоа значи дека делот од графикот на функцијата за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ е над x -оската, додека делот од графикот на функцијата за $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ е под x -оската.
- Функцијата опаѓа за секој $x \in [0, \pi]$ Нејзината максимална вредност во интервалот $[0, \pi]$ е $\cos 0 = 1$, додека минимална вредност во интервалот $[0, \pi]$ е $\cos \pi = -1$.

Во правоаголен координатен систем xOy ќе ги нанесеме точките од графикот на функцијата $y = \cos x$ дадени во следната табела, за нејзините вредности на интервалот $[0, \pi]$.

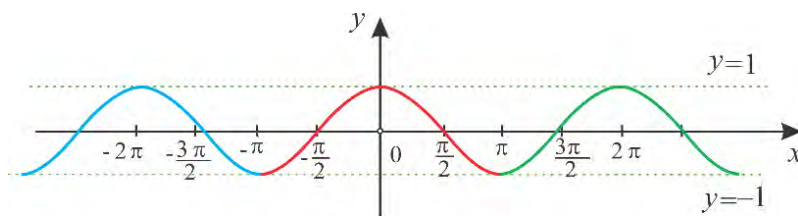
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Имајќи предвид дека функцијата $y = \cos x$ е парна, односно $\cos(-x) = \cos x$ ги добиваме соодветните точки од графикот и на интервалот $[-\pi, 0]$ (црт. 6). Од парноста на функцијата $y = \cos x$ следува дека нејзиниот график на интервалот $[-\pi, 0]$ е симетричен на графикот на функцијата на интервалот $[0, \pi]$ во однос на y -оската (цртеж 3).



Цртеж 3

Графикот на функцијата $y = \cos x$, за $x \in (-\infty, +\infty)$ се добива со translација на графикот добиен во интервалот $[-\pi, \pi]$, по x -оската за $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоа е бесконечна крива и се вика **косинусоида** (цртеж 4).



Цртеж 4

Од графикот на функцијата $y = \cos x$ може да ги прочитаеме нејзините основни својства:

- Функцијата е дефинирана на целата реална права.
- Функцијата е ограничена, односно $-1 \leq \cos x \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$.
- Функцијата е периодична со основен период 2π .
- Функцијата $y = \cos x$ е парна, односно $\cos(-x) = \cos x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.
- Функцијата има нули во точките $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата има максимална вредност $y_{\max} = 1$ за $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а минимална вредност $y_{\min} = -1$ за $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата монотонно расте на интервалите $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, а монотонно опаѓа на интервалот $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата е позитивна за $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, а е негативна за $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

График на тригонометриската функција $y = \operatorname{tg} x$

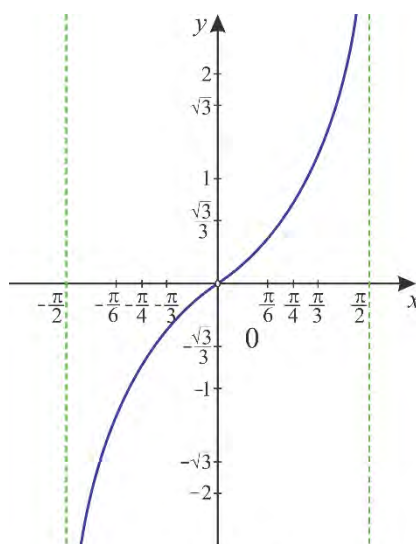
Користејќи ја тригонометриската кружница и тангенсната оска, може да запишеме некои својства на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

- Функцијата е дефинирана за секој $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоа значи правите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ не го сечат графикот на функцијата.
- Функцијата не е ограничена, што значи дека таа ги прима сите реални вредности. Ако вредностите на аргументот x се доволно блиски на вредностите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, тогаш соодветните вредности на функцијата се бесконечно големи по апсолутна вредност. Попрецизно, кога x се приближува до $-\frac{\pi}{2}$, тогаш функцијата има бескрајно големи негативни вредности, а кога x се приближува до $\frac{\pi}{2}$, функцијата има бескрајно големи позитивни вредности. За графикот на функцијата тоа значи дека неогранично се доближува до правите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата е периодична со основен период π . Според тоа доволно е да го нацртаме графикот на функцијата во некој од интервалите со должина π , на пример, во интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функцијата е напарна, што значи доволно е да го нацртаме нејзиниот график на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тој е симетричен во однос на координатниот почеток на графикот на функцијата на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ има нула за $x = 0$. Тоа значи дека графикот на функцијата ја сече x -оската во точката $(0, 0)$.
- Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е позитивна за $0 < x < \frac{\pi}{2}$, а негативна за $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Тоа значи дека делот од графикот на функцијата за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ е над x -оската, додека делот од графикот на функцијата за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ е под x -оската.
- Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ монотонно расте на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Да ги нанесеме во правоаголен координатен систем xOy точките од графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$, добиени во следната табела, за нејзините вредности на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	–

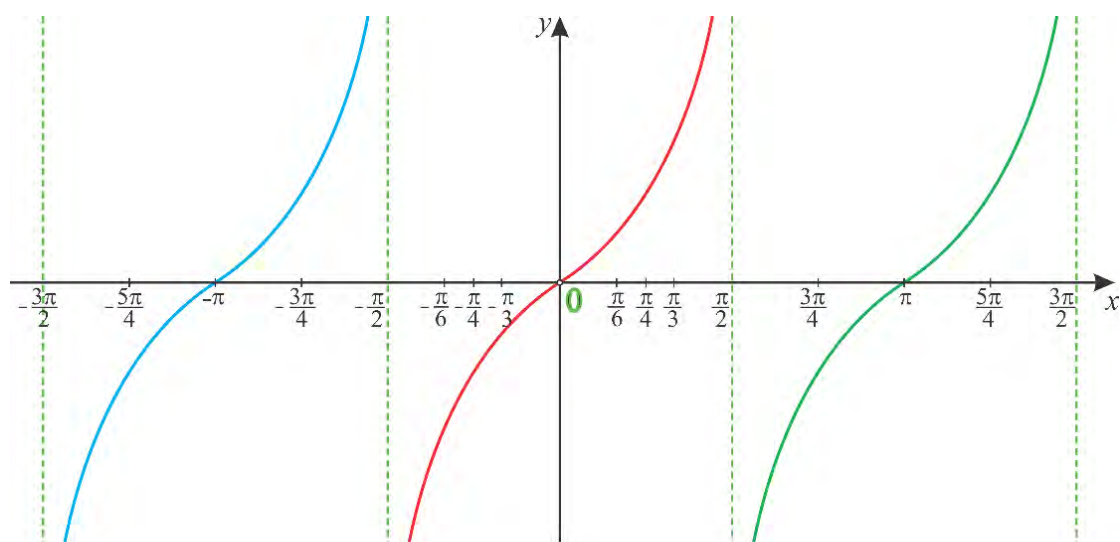
Имајќи предвид дека функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е непарна, ги добиваме и соодветните точки на графикот на функцијата на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ т.е. нејзиниот график на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ е симетричен во однос на координатниот почеток на графикот на функцијата на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. (цртеж 5).



Цртеж 5

Кога вредноста на x се приближува кон $-\frac{\pi}{2}$, тогаш графикот од долната страна се приближува кон вертикалната права $x = -\frac{\pi}{2}$. Таа права се вика **асимптота** на функцијата $y = \operatorname{tg} x$. Слично, кога вредностите на x се многу блиски до $\frac{\pi}{2}$, тогаш графикот се доближува кон вертикалната права $x = \frac{\pi}{2}$ која, исто така, е асимптота.

Графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ ќе го добиеме од графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (цртеж 5) со негова translација по x -оската за $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Графикот на функцијата $\operatorname{tg} x$ се вика **тангенсоида** (цртеж 6).



Цртеж 6

Од графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ може да ги прочитае нејзините основни својства:

- Функцијата е дефинирана за секој $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, односно нејзината дефинициона област е множеството $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Функцијата $\operatorname{tg} x$ е неограничена. Ако вредностите на аргументот x се доволно блиски на вредностите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, тогаш соодветните вредности на функцијата се бесконечно големи по апсолутна вредност.

- Правите $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се вертикални асимптоти на функцијата.

Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е периодична функција со основен период π .

- Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е непарна функција.
- Функцијата има нули во $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е монотонно растечка на $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата е позитивна на секој од интервалите $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ и негативна на секој од интервалите $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

График на тригонометриската функција $y = \operatorname{ctg} x$

Користејќи ја тригонометриската кружница и котангенсната оска ќе запишеме некои својства на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$.

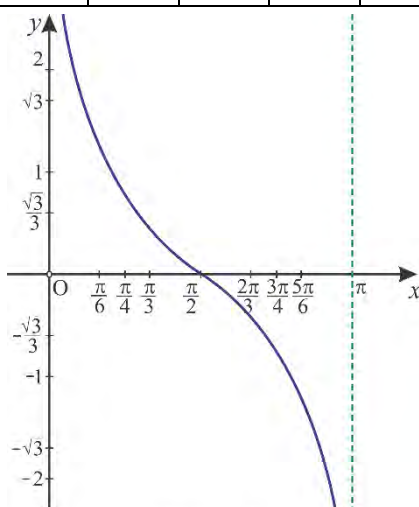
- Функцијата е дефинирана за секој $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоа значи правите $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ не го сечат графикот на функцијата.
- Функцијата не е ограничена, односно таа ги прима сите реални вредности. Ако вредностите на аргументот x се доволно блиски на вредностите

$x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, тогаш соодветните вредности на функцијата се бесконечно големи по апсолутна вредност. Поточно кога x се приближува до 0, тогаш функцијата прима бескрајно големи позитивни вредности, а кога x се приближува до π , функцијата прима бескрајно големи негативни вредности. Тоа значи дека графикот на функцијата неогранично се доближува до правите $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Функцијата е периодична со основен период π . Според тоа доволно е да го нацртаме графикот на функцијата во некој од интервалите со должина π , на пример, во интервалот $(0, \pi)$.
- Функцијата е напарна, што значи дека нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.
- Функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ на интервалот $(0, \pi)$ има нула за $x = \frac{\pi}{2}$. Тоа значи дека графикот на функцијата ја сече x -оската во точката $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- Функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ прима позитивни вредности за
- $0 < x < \frac{\pi}{2}$, а негативни за $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Тоа значи дека делот од графикот на функцијата за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ е над x -оската, додека делот од графикот на функција за $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ е под x -оската.
- Функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ опаѓа на интервалот $(0, \pi)$.

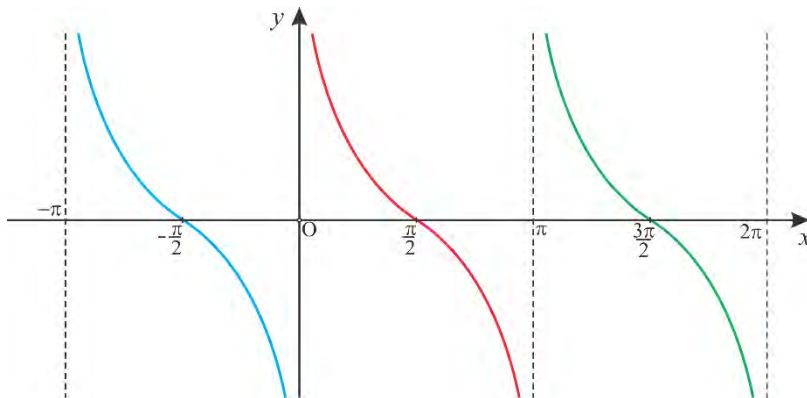
Да ги нанесеме во правоаголен координатен систем xOy точките од графикот на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ дадени во следната табела за нејзините вредности на интервалот $(0, \pi)$ (цртеж 7).

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$



Цртеж 7

Бидејќи $\operatorname{ctg} x$ е периодична функција со основен период π , нејзиниот график се состои од бесконечно многу криви, како на цртеж 7, кои се добиваат со трансформација на графикот на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ од интервалот $(0, \pi)$ по x -оската за $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (цртеж 8).



Цртеж 8

Од графикот на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ може да ги прочитаеме нејзините основни својства:

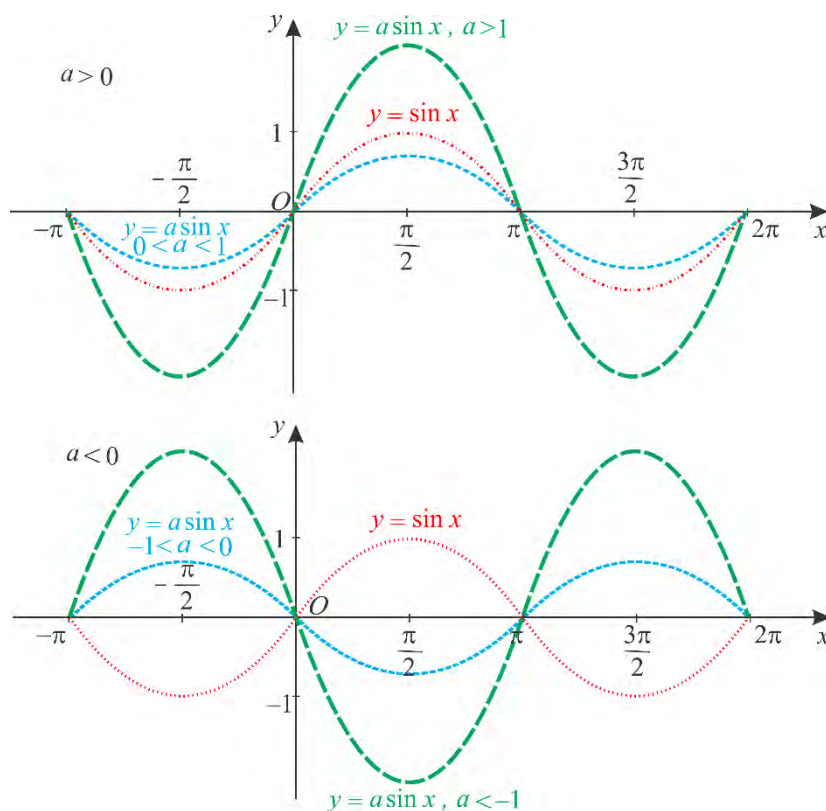
- Функцијата е дефинирана за секој $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, односно нејзината дефинициона област е множеството $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ е неограничена. Ако вредностите на аргументот x се доволно блиски на вредностите $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, тогаш соодветните вредности на функцијата се бесконечно големи по апсолутна вредност.
- Правите $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се вертикални асимптоти на функцијата.
- Функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ е периодична функција со основен период π .
- Функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ е непарна функција.
- Функцијата има нули за $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата е позитивна на секој од интервалите $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ и негативна на секој од интервалите $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Функцијата $\operatorname{ctg} x$ е монотонно опаѓачка на секој интервал $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.7. Скицирање на графици на тригонометриски функции

График на функцијата $y = a \sin x$

Графикот на функцијата $y = a \sin x$ можеме лесно да го конструираме со помош на графикот на функцијата $y = \sin x$.

Вредностите на функцијата $y = a \sin x$ за одредена вредност на променливата x се добиваат со множење со бројот a на вредностите на функцијата $y = \sin x$ за истата вредност на x . Можните случаи за $a > 0$ и $a < 0$ се дадени на цртеж 1.



Цртеж 1

Бројот $|a|$ се вика **амплитуда** за функцијата $y = a \sin x$ и го дава најголемото отстапување на точките на графикот од апсцисната оска.

Графикот на функцијата $y = \sin x$ се наоѓа меѓу правите $y = -1$ и $y = 1$, односно $-1 \leq \sin x \leq 1$, додека за функцијата $y = a \sin x$ имаме $-|a| \leq a \sin x \leq |a|$, односно нејзиниот график се наоѓа меѓу правите $y = |a|$ и $y = -|a|$.

Пример 1. Графикот на функцијата $y = 2 \sin x$ се добива кога вредностите на ординатите на точките од графикот на $y = \sin x$ ќе се помножат со 2. Слично, кога ординатите на точките се множат со $-\frac{1}{2}$ се добива графикот на $y = -\frac{1}{2} \sin x$ (цртеж 2).

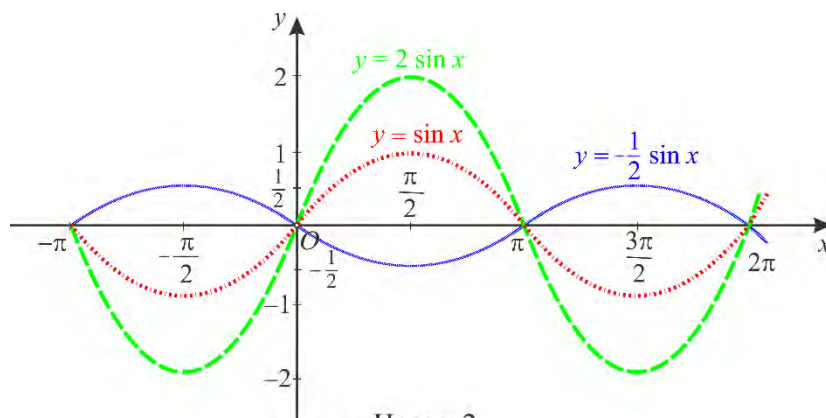


График на функцијата $y = \sin bx$

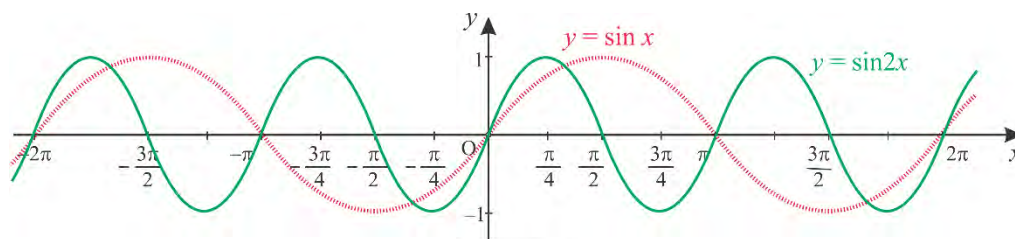
Константата b ја множи променливата x , според тоа треба да се очекува промена на периодот на функцијата $y = \sin bx$. Според тоа, за периодот на функцијата $y = \sin bx$ имаме:

$$\sin bx = \sin(bx + 2k\pi) = \sin b\left(x + \frac{2k\pi}{b}\right).$$

Значи, броевите $\frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$ се периоди на функцијата $y = \sin bx$, а нејзиниот основен период е $\frac{2\pi}{b}$. Од тие причини доволно е да го нацртаме делот од графикот на функцијата на интервалот $\left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$, а потоа со транслација по должината на x -оската за $k \cdot \frac{2\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$ ќе го добиеме графикот на функцијата $y = \sin bx$.

Делот од графикот на интервалот $\left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$ се вика **бран**, а бројот $\frac{2\pi}{b}$ се вика **должина на бранот**. Реципрочната вредност $\frac{b}{2\pi}$ на брановата должина се вика **фреквенција** или зачестеност.

Пример 2. На цртеж 3 е прикажан графикот на функцијата $y = \sin 2x$ добиен на следниот начин:

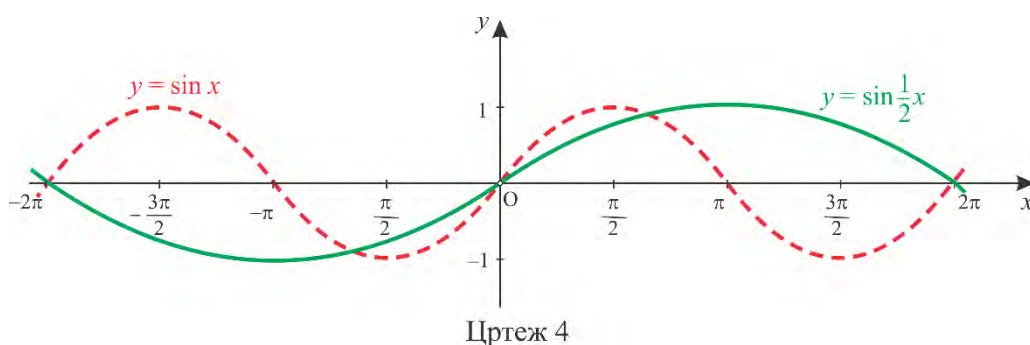


Цртеж 3

- Периодот на функцијата е $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, што значи дека графикот на функцијата е синусоида со двапати покус бран. Според тоа доволно е графикот на функцијата да се претстави на интервалот $[0, \pi]$;
- Нулите на функцијата се добиваат од равенството $k\pi = 2x$ т.е. $x = \frac{k\pi}{2}$, каде што $k \in \mathbb{Z}$. Ова значи дека нулите на интервалот $[0, \pi]$ се $x_0 = 0$, $x'_0 = \frac{\pi}{2}$, $x''_0 = \pi$
- Максимум на функцијата се добива од равенството $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, од каде $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$. Ова значи дека $x_{\max} = \frac{\pi}{4}$ на интервалот $[0, \pi]$;
- Минимум на функцијата е $2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ т.е. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$ или во интервалот $[0, \pi]$, $x_{\min} = \frac{3\pi}{4}$. ♦

Пример 3. На цртеж 4 е прикажан графикот на функцијата $y = \sin \frac{1}{2}x$.

Нејзиниот основен период е $T = \frac{2\pi}{b} = 4\pi$. ♦



Од цртежите 3 и 4 можеме да забележиме дека, ако $|b| > 1$, тогаш основниот период на функцијата $y = \sin bx$ е помал од основниот период на функцијата $y = \sin x$, а ако $|b| < 1$, тогаш тој е поголем. Исто така, треба да се внимава, ако $b < 0$, тогаш функцијата го менува знакот, бидејќи променливата го менува знакот.

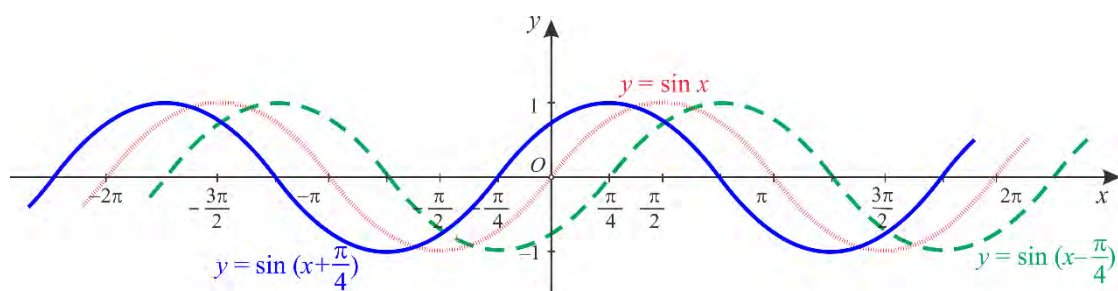
График на функцијата $y = \sin(x + c)$

Графикот на функцијата $y = \sin(x + c)$, каде c е кој било реален број различен од нула, може да се конструира со помош на графикот на функцијата $y = \sin x$. Знаејќи дека $\sin((x + c) - c) = \sin x$ за секој x , следува дека графикот на функцијата $y = \sin(x + c)$ може да го добиеме така што графикот на функцијата $y = \sin x$ го поместуваме по x -оската за $|c|$. Ако $c > 0$, поместувањето е налево

за $|c|$, а ако $c < 0$, тогаш поместувањето е надесно за $|c|$. Значи поместуваме за онаа вредност на променливата x за која изразот $x+c$ за аргументот на функцијата $y = \sin(x+c)$ се анулира, односно за онаа вредност за која $x+c=0$ или $x=-c$.

Константата c се вика **фазна константа**. Затоа велиме дека функциите $y = \sin x$ и $y = \sin(x+c)$ се разликуваат во фазата, односно функцијата $y = \sin(x+c)$ ја преминува (заостанува) за фазата функцијата $y = \sin x$, во зависност од тоа дали $c > 0$ или $c < 0$.

Пример 4. Графикот на функцијата $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ се добива со поместување налево за $\frac{\pi}{4}$, бидејќи $c = \frac{\pi}{4} > 0$. Слично, графикот на функцијата $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ се добива со поместување надесно за $\frac{\pi}{4}$, бидејќи $c = -\frac{\pi}{4} < 0$ (цртеж 5). ♦



Цртеж 5

График на функцијата $y = a \sin(bx+c)$

За да го конструираме графикот на функцијата $y = a \sin(bx+c)$ ќе ги користиме графиците на функциите $y = \sin x$, $y = a \sin x$, $y = \sin bx$ и $y = \sin(x+c)$.

Амплитудата на функцијата $y = a \sin(bx+c)$ е бројот $|a|$, односно $-|a| \leq a \sin(bx+c) \leq |a|$. Тоа значи дека графикот на функцијата $y = a \sin(bx+c)$ се наоѓа меѓу правите $y = |a|$ и $y = -|a|$.

Периодот на функцијата $y = a \sin(bx+c)$ е $\frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$, бидејќи

$$a \sin(bx+c) = a \sin(bx+c+2k\pi) = a \sin\left(b\left(x+\frac{2k\pi}{b}\right)+c\right).$$

Од равенката $bx+c=0$, добиваме $x = -\frac{c}{b}$, па графикот на функцијата $y = a \sin(bx+c)$ се добива од графикот на функцијата $y = a \sin x$ со поместување по должината на x -оската налево за $-\frac{c}{b}$ ако $\frac{c}{b} > 0$, односно надесно за $-\frac{c}{b}$ ако

$\frac{c}{b} < 0$. Преостанатите потребни податоци: нули на функцијата, најголемата и најмалата вредност ги одредуваме како претходно.

Сега можеме да го конструираме графикот на функцијата $y = a \sin(bx + c)$. Тоа постапно ќе го направиме во 4 чекори:

1 чекор: го конструираме графикот на функцијата $y = \sin x$,

2 чекор: го конструираме графикот на функцијата $y = \sin bx$,

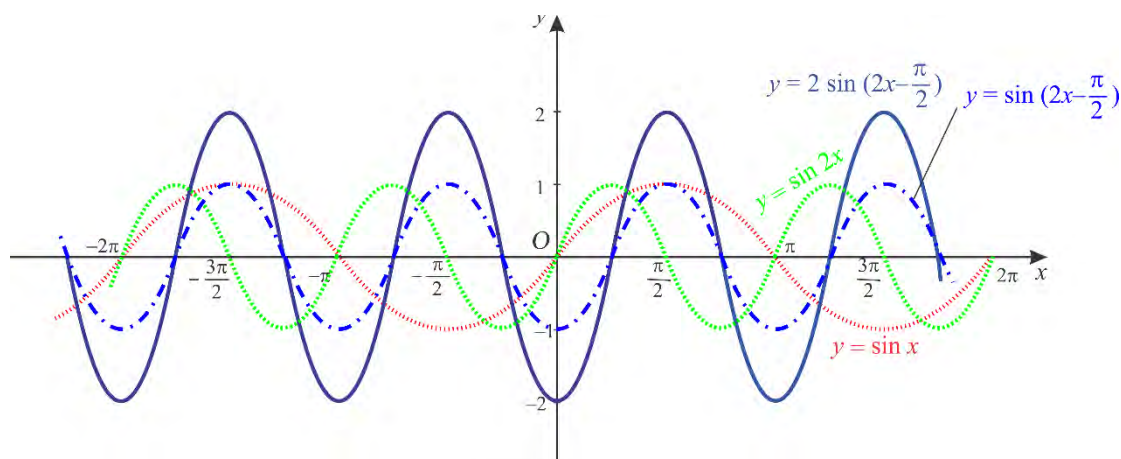
3 чекор: го конструираме графикот на функцијата $y = \sin(bx + c)$,

4 чекор: го конструираме графикот на функцијата $y = a \sin(bx + c)$.

Задача 1. Нацртај го графикот на функциите:

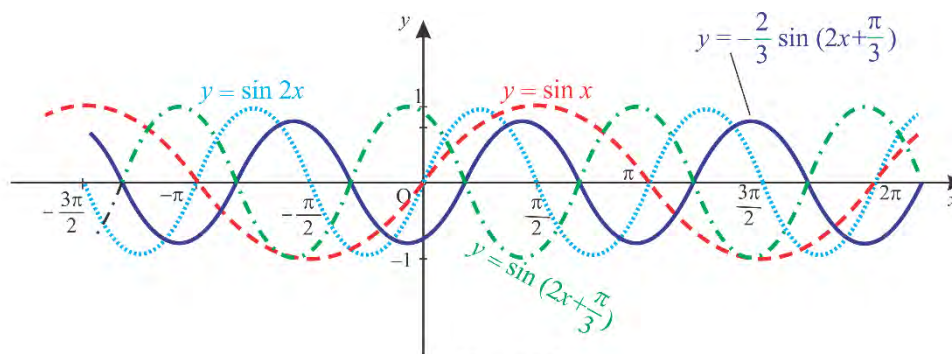
а) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ **б)** $y = -\frac{2}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

а) $a = 2$, $b = 2$, $c = -\frac{\pi}{2}$, $T = \pi$, $\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$. Сите четири чекори се дадени на цртеж 6.



Цртеж 6

б) $a = -\frac{2}{3}$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{3}$, $T = \pi$, $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{6}$. Сите четири чекори се дадени на цртеж 7.



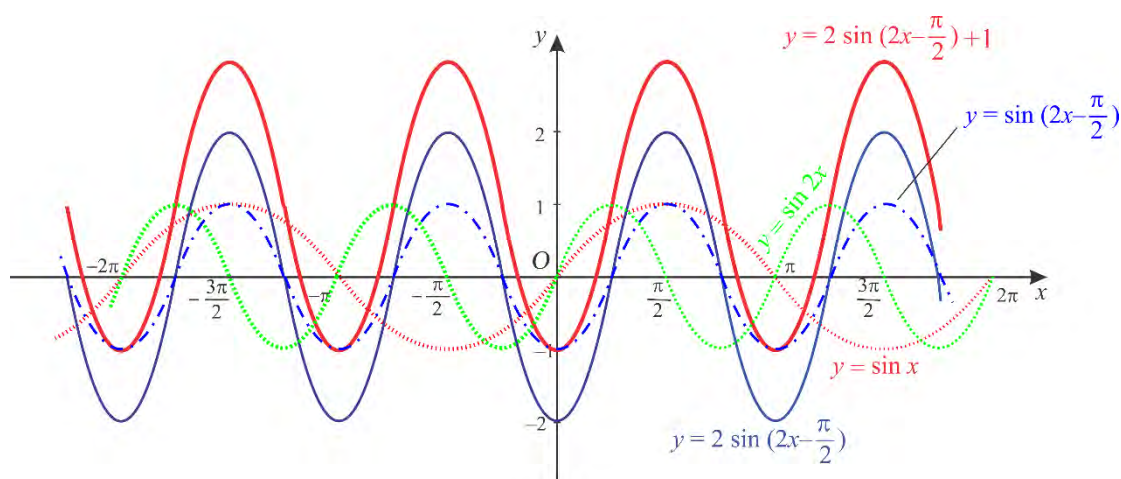
Цртеж 7

Задача 2. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Решение. За конструирање на графикот на функцијата од облик $y = a \sin(bx + c) + d$ ги вршиме претходно наведените 4 чекори и го добиваме графикот на функцијата $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. За конструкција на графикот на $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ треба да го извршиме и следниот:

5 чекор: Го поместуваме графикот на функцијата $y = a \sin(bx + c)$ по y -оската нагоре ако $d > 0$, и надолу ако $d < 0$.

Тоа значи дека графикот на $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ треба да се помести за 1 единица нагоре и ќе се добие графикот на $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ (цртеж 8).



Цртеж 8

График на функцијата $y = a \cos(bx + c) + d$

Од тоа што $a \cos(bx + c) + d = a \sin\left(bx + c + \frac{\pi}{2}\right) + d$, графикот на функцијата $y = a \cos(bx + c) + d$ може да се добие со цртање на графикот на функцијата $y = a \sin(bx + c_0)$, каде што $c_0 = c + \frac{\pi}{2}$.

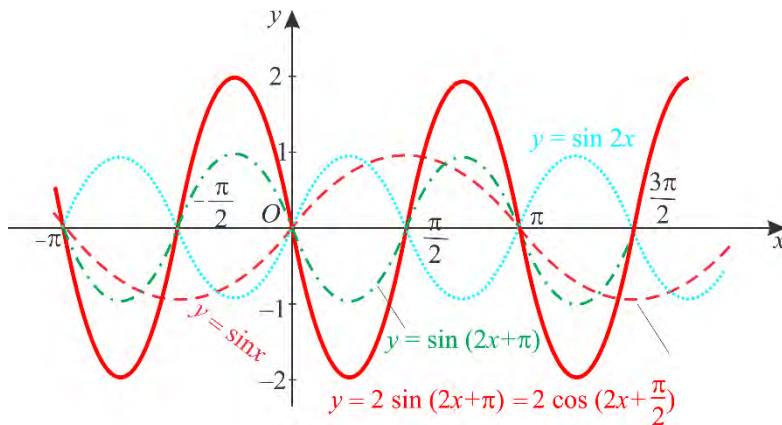
Ова значи дека a е амплитуда, $T = \frac{2\pi}{b}$ е период, а $x = -\frac{c}{b}$ е фазно поместување. Имајќи го тоа предвид, графикот на функцијата $y = a \cos(bx + c) + d$ може лесно да се конструира со помош на графикот на функцијата $y = \cos x$.

Задача 1. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Од $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ добиваме дека

$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin(2x + \pi)$. Според тоа, конструирањето на графикот $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ го сведуваме на конструирање на графикот на функцијата $y = 2\sin(2x + \pi)$. Притоа имаме:

- Амплитуда $a = 2$,
- Период $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$,
- Фазно поместување: $x = -\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{2}$,
- Нулите на функцијата се добиваат од равенката $2x + \pi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ т.е. $x = \frac{k\pi - \pi}{2}$, за $k \in \mathbb{Z}$. Со замена за $k = 0, k = \pm 1, k = \pm 2, k = \pm 3$ соодветно ги добиваме нулите: $x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{\pi}{2}, x_4 = \pi, x_5 = -\pi, x_6 = -\frac{3\pi}{2}$,
- Најголемата вредност на функцијата се добива од равенката $2x + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ т.е. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, од каде за $k = 0$ се добива $x_{\max} = -\frac{\pi}{4}$, а за $k = 1$ се добива $x_{\max} = \frac{3\pi}{4}$
- Најмалата вредност на функцијата се добива за $k = 0, x_{\min} = \frac{\pi}{4}$, за $k = 1, x_{\min} = \frac{5\pi}{4}$ (цртеж 1).

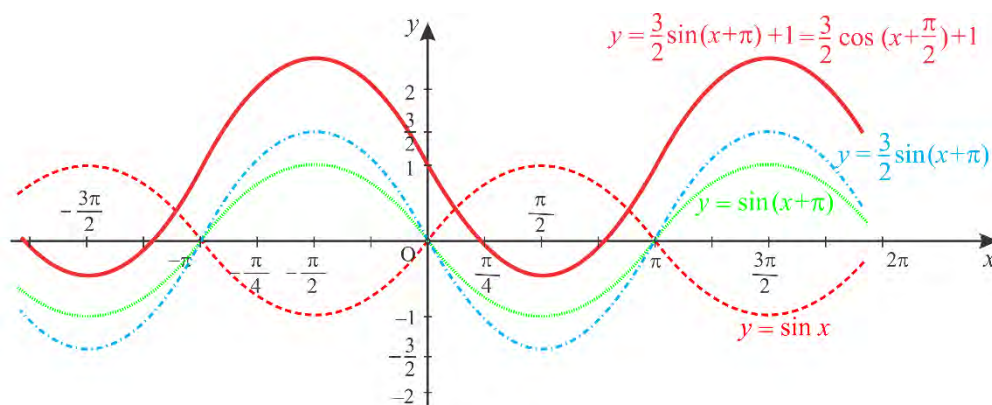


Цртеж 1

Задача 2. Нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{3}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Од $\frac{3}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ имаме:

$$\frac{3}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2}\sin(x + \pi) + 1.$$



Цртеж 2

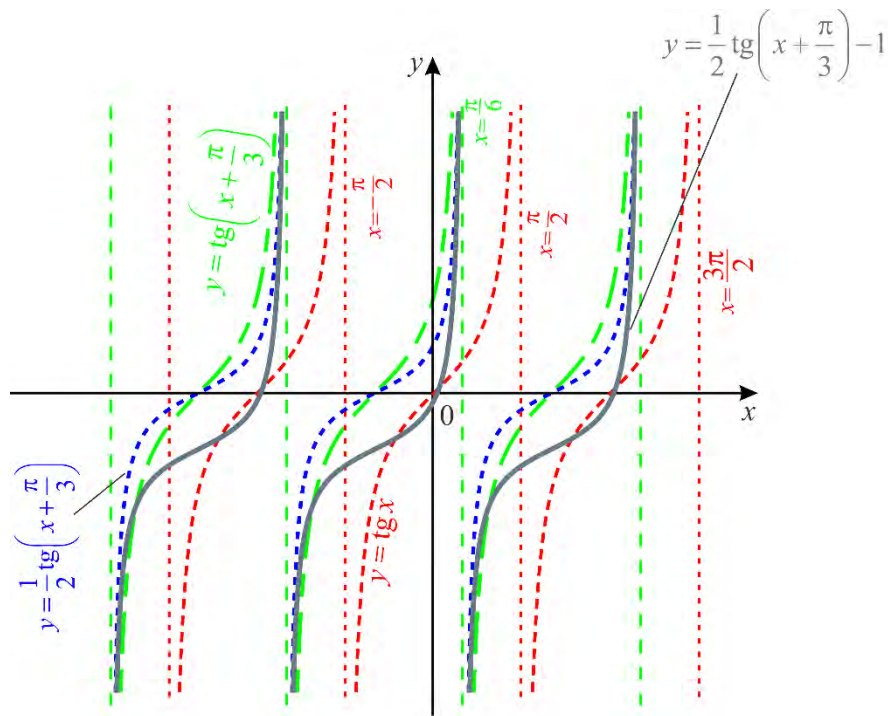
Значи, конструкцијата на графикот се сведува на конструкција на графикот на функцијата $y = \frac{3}{2} \sin(x + \pi) + 1$ за која $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$, $T = 2\pi$, $x = -\frac{c}{b} = -\pi$ (цртеж 2). ♦

График на функцијата $y = a \operatorname{tg}(bx + c) + d$

Својствата на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ веќе ги изучивме. Графикот на функцијата $y = a \operatorname{tg}(bx + c) + d$ се добива слично како и графиците на функциите $y = a \sin(bx + c) + d$ и $y = a \cos(bx + c) + d$.

Пример 1. Нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

Решение. Прво го цртаме графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, за $k \in \mathbb{Z}$. Потоа со поместување по должината на x -оската налево за $\frac{\pi}{3}$ единици се добива графикот на $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Ако секоја втора координата на $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ се помножи со $\frac{1}{2}$ се добива $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ и на крај со поместување за една единица по y -оската надолу се добива графикот на функцијата $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.



Цртеж 1

Забелешка. Од формулата за сведување $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, следува дека графикот на функцијата $y = a \operatorname{ctg}(bx + c) + d$ се добива од графикот на функцијата $y = -a \operatorname{tg}\left(bx - \left(\frac{\pi}{2} - c\right)\right) + d$.

Задачи

Нацртај го графикот на функцијата:

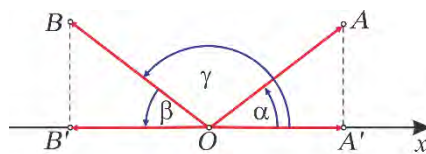
- | | | |
|-----------------------------|---|--|
| 1. $y = 3 \sin x$ | 2. $y = -\frac{3}{2} \sin x$ | 3. $y = \sin 3x$ |
| 4. $y = \sin 3x - 1$ | 5. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | 6. $y = 2 \sin\left(\frac{4x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ |
| 7. $y = \frac{1}{2} \cos x$ | 8. $y = \cos 3x + 1$ | 9. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$. |

3.8. Адициони формули

Со помош на вредностите на $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \alpha$ и $\cos \beta$, може да ги одредиме вредностите на $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$, кои се познати како адициони формули.

Претходно да видиме што претставува алгебарска вредност на вектор на оска. Нека се дадени векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и една оска x (цртеж 1). Ако од крајната

точка на векторот $\overrightarrow{OA}$ спуштиме нормала на x -оската и пресечната точка ја означиме со A' , тогаш велиме дека векторот $\overrightarrow{OA'}$ е проекција на векторот $\overrightarrow{OA}$ на x -оската. Слично, векторот $\overrightarrow{OB'}$ е проекција на $\overrightarrow{OB}$ на x -оската.



Цртеж 1

Под **агол меѓу векторот $\overrightarrow{OA}$ и x -оската** (или векторот $\overrightarrow{OB}$ и x -оската) го подразбираме најмалиот агол за кој x -оската со ротација во позитивна насока ќе има ист правец и насока со векторот $\overrightarrow{OA}$ (или векторот $\overrightarrow{OB}$).

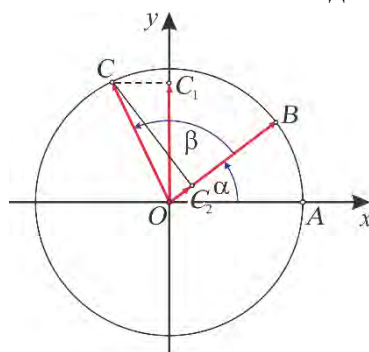
Од $\triangle OA'A$ следува дека должината на векторот $\overrightarrow{OA'}$ е $|\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos \alpha$ и таа претставува **алгебарска вредност на векторот $\overrightarrow{OA'}$ на x -оската**. Слично, должината на векторот $\overrightarrow{OB'}$ ќе биде $|\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \beta$.

Аголот β можеме да го запишеме како $\beta = \pi - \gamma$, па имаме $\cos \beta = \cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$. Според тоа $|\overrightarrow{OB'}| = -|\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \gamma$ т.е. $-\overrightarrow{OB'} = |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \gamma$, што е алгебарска вредност на векторот $\overrightarrow{OB}$ на x -оската.

Значи алгебарската вредност на проекцијата на кој било вектор на дадена оска е производ од должината на тој вектор и косинус од аголот меѓу векторот и оската.

Синус од збир и разлика на два агли

Да го означиме со β аголот меѓу векторите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Ако векторот $\overrightarrow{OB}$ зафаќа агол α со позитивниот дел на x -оската, тогаш аголот што го зафаќа векторот $\overrightarrow{OC}$ со позитивната насока на x -оската е еднаков на $\alpha + \beta$ (цртеж 2).



Цртеж 2

Од дефиницијата за синус имаме $\sin(\alpha + \beta) = |\overrightarrow{OC_1}|$

Ако од точката C спуштиме нормала CC_2 на векторот $\overrightarrow{OB}$, имаме:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{C_2C}.$$

Бидејќи $|\overrightarrow{OC_1}|$ е алгебарска вредност на проекцијата на векторот $\overrightarrow{OC}$ на y -оската, тогаш $|\overrightarrow{OC_1}|$ истовремено е и алгебарската вредност на проекцијата на збирот од векторите $\overrightarrow{OC_2}$ и $\overrightarrow{C_2C}$ на y -оската, па според тоа имаме:

$$|\overrightarrow{OC_1}| = |\overrightarrow{OC_2}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{OC_2}, \overrightarrow{OC_1}) + |\overrightarrow{C_2C}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{C_2C}, \overrightarrow{OC_1}).$$

Од алгебарските вредности имаме: $|\overrightarrow{OC_2}| = |\overrightarrow{OC}| \cos \beta = \cos \beta$ и $|\overrightarrow{C_2C}| = |\overrightarrow{OC}| \cdot \sin \beta = \sin \beta$. Од формулите за трансформација се добива дека $\cos \angle(\overrightarrow{OC_2}, \overrightarrow{OC_1}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ и $\cos \angle(\overrightarrow{C_2C}, \overrightarrow{OC_1}) = \cos \alpha$. Ова значи дека $|\overrightarrow{OC_1}| = \cos \beta \cdot \sin \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha$ т.е. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$ што е формула за синус од збир на два агли.

Од тоа што $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta)$ со примена на својствата на функциите се добива

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

т.е. формула за синус од разлика на два агли.

Пример 1. а) Со примена на адициони формули, може да пресметаме:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1).$$

Пример 2. а) Ако во изразот $\sin 36^\circ \cdot \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \cdot \sin 24^\circ$, ставиме смена $\alpha = 36^\circ$ и $\beta = 24^\circ$, тогаш

$$\sin 36^\circ \cdot \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \cdot \sin 24^\circ = \sin(36^\circ + 24^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Слично,

$$\sin 137^\circ \cdot \cos 62^\circ - \cos 137^\circ \cdot \sin 62^\circ = \sin(137^\circ - 62^\circ) = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} + 1).$$

Задача 1. Упрости го изразот $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } & \sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \\ & = \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 30^\circ \cdot \sin \alpha + \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 30^\circ \cdot \sin \alpha = \\ & = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Косинус од збир и разлика на два агли

Од $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ имаме $\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)$ и

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right). \text{ Според тоа:}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Значи $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ е формула за косинус од збир на два агли.

Од

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

т.е. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ е формула за косинус од разлика на два агли.

Пример 3. а) Со примена на формулата за косинус од збир на два агли може да пресметаме

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

б) Слично со примена на формулата за косинус од разлика на два агли, имаме

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1).\end{aligned}$$

Пример 4. а) Ако ставиме смена $\alpha = 107^\circ$ и $\beta = 17^\circ$, тогаш

$$\cos 107^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \cdot \sin 17^\circ = \cos(107^\circ - 17^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

б) Слично $\cos 36^\circ \cdot \cos 24^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 24^\circ = \cos(36^\circ + 24^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Задача 2. Упрости го изразот $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)$.

Решение. $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) =$

$$\begin{aligned}&= \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha + \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha - \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha = \cos \alpha.\end{aligned}$$

Тангенс од збир и разлика на два агли

Од $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, за $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, имаме:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta},$$

при услов $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$.

Ако броителот и именителот ги поделиме со $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ ($\cos \alpha \cdot \cos \beta \neq 0$), имаме:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Според тоа,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

е формула за тангенс од збир на два агли.

Од $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ имаме:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{што е формула за тангенс}$$

од разлика на два агли.

Пример 5. а) Со примена на формулата за тангенс од збир на два агли се добива дека

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

б) Слично

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Задача 3. Одреди ја вредноста на $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, ако $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Решение. Со примена на формулата за тангенс од збир на два агли имаме:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{2 + 1}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Котангенс од збир и разлика на два агли

Од $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ имаме:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}, \quad \text{за } \sin(\alpha + \beta) \neq 0.$$

Ако броителот и именителот на дропката го поделиме со $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, за $\sin \alpha \cdot \sin \beta \neq 0$, тогаш имаме:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Значи $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$ $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ е формула за котангенс од збир на два агли.

Слично, за котангенс од разликата на два агли имаме:

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. а) Со примена на формулата за котангенс од збир на два агли имаме

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 105^\circ &= \operatorname{ctg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 - 1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{3 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 3)^2}{3 - 9} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{-6} = -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

б) Слично

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{ctg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Задача 4. Одреди го $\alpha + \beta$, ако $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ и $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Од $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}} = -1$ и $0 < \alpha + \beta < \pi$ следува

$$\text{дека } \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

Задачи

1. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\sin 278^\circ \cdot \cos 68^\circ - \cos 278^\circ \cdot \sin 68^\circ$

б) $\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 9^\circ$

в) $\cos 18^\circ \cdot \cos 63^\circ + \sin 18^\circ \cdot \sin 63^\circ$

г) $\cos 32^\circ \cdot \cos 58^\circ - \sin 32^\circ \cdot \sin 58^\circ.$

2. Упрости ги изразите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$$\text{б)} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{в)} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{г)} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

3. Одреди ја вредноста на :

$$\text{а)} \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{ ако е } \operatorname{tg} \alpha = -1$$

$$\text{б)} \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \text{ ако е } \sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \sin \beta = \frac{1}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

4. Докажи ги идентитетите:

$$\text{а)} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{б)} \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\text{в)} \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{г)} \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta.$$

3.9. Тригонометриски функции од двоен агол и половина агол

Ако во формулата $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$ ставиме смена $\beta = \alpha$, тогаш

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

т.е. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ е формула за синус од двоен агол.

На сличен начин од $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ со смената $\beta = \alpha$ се добива $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ т.е. формула за косинус од двоен агол.

Формулите за тангенс и котангенс од двоен агол се:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ за } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ и } \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \text{ за } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Нека $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и α е агол од вториот квадрант. Одреди ја вредноста на :

$$\text{а)} \sin 2\alpha \quad \text{б)} \cos 2\alpha \quad \text{в)} \operatorname{tg} 2\alpha \quad \text{г)} \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Решение. Бидејќи аголот α е во вториот квадрант, имаме $\cos \alpha < 0$.

Тогаш:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{12}{5}.$$

$$\text{а)} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\text{б)} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$$

$$\text{в)} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = -\frac{120}{119}$$

$$\text{г)} \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 - 1}{2 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right)} = -\frac{119}{120}.$$

Задача 1. Одреди ја вредноста на:

$$\text{а)} 2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \qquad \text{б)} \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$$

$$\text{в)} \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}} \qquad \text{г)} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - 1}{2\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}.$$

Решение. а) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \sin 2 \cdot 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$

$$\text{б)} \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 2 \cdot 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{в)} \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg} 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\text{г)} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - 1}{2\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}} = \operatorname{ctg} 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 2. Докажи го идентитетот:

$$\text{а)} 1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin 2\alpha \qquad \text{б)} \operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

Решение. а) Со трансформација на левата страна се добива:

$$\begin{aligned} 1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= 1 - (\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= 1 - (1 - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha) = 1 - 1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Бидејќи $2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ се добива десната страна на равенството, со што доказот е завршен.

б) Со трансформација на левата страна се добива:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{\cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha)}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Бидејќи $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, се добива десната страна од равенството.

Тригонометриските формули за половина агол се добиваат од основните идентитети $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ во кои наместо аголот α ставаме $\frac{\alpha}{2}$ т.е.

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \text{ и } \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha.$$

Ако ги собереме овие две равенства, имаме $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$, односно

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \text{ т.е. формула за косинус од половина агол.}$$

Со одземање на $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ и $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha$ се добива

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \text{ т.е. } \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ формула за синус од половина агол.}$$

Изразите $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ и $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ имаат смисла бидејќи $1 + \cos \alpha \geq 0$ и $1 - \cos \alpha \geq 0$.

$$\text{Бидејќи } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ за } \alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

тогаш со замена на формулите за синус и косинус од половина агол се добиваат формули за тангенс и котангенс од половина агол т.е.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \text{ и } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

Знакот пред коренот го избираме во зависност од тоа во кој квадрант е аголот $\frac{\alpha}{2}$ и каков е знакот на тригонометриската функција за тој агол.

Пример 2. Одреди ја вредноста на $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, ако:

а) $\alpha = 15^\circ$ **б)** $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

а) Бидејќи аголот $\alpha = 15^\circ$ може да го запишеме како $\frac{30^\circ}{2}$ имаме:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\ \cos 15^\circ &= \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{ctg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ}} = 2 + \sqrt{3}$$

б) Од $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$ имаме:

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{1 - \cos \frac{\pi}{4}}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Задачи

1. Нека $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и α е агол во вториот квадрант. Одреди ја вредноста на:

а) $\sin 2\alpha$ б) $\cos 2\alpha$ в) $\operatorname{tg} 2\alpha$ г) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

2. За $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, најди: $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

3. Упрости ги изразите:

а) $2 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$

б) $\cos^2 \frac{\pi}{10} - \sin^2 \frac{\pi}{10}$

в) $\sin \frac{\pi - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\pi - \alpha}{2}$

г) $\frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}$.

4. За $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, одреди ја вредноста на:

а) $\sin 2\alpha$ б) $\cos 2\alpha$ в) $\operatorname{tg} 2\alpha$ г) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

5. Скрати ги дробките:

а) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$

б) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$

в) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$

г) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

3.10. Трансформација на тригонометриски функции

Трансформација на производ на тригонометриски функции во збир и разлика

Со собирање на равенствата:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

се добива:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, имаме:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

На сличен начин, со собирање на равенствата

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

добиваме:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Пример 1. Одреди ја вредноста на производот $\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$.

Решение. Со примена на формулата за трансформација на производ од синус и косинус на два различни агли имаме:

$$\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\sin \pi + \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = -\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Одреди ја вредноста на производот $2 \sin \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$.

Решение. Со примена на формулата за трансформација на производ од синус на два различни агли имаме:

$$2 \sin \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) \right) = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}. \blacklozenge$$

Задача 1. Докажи го идентитетот $\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1}{4}(2 \cos 2\alpha + 1)$.

Решение. Со примена на формулата за трансформација на производ од синус на два различни агли имаме:

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4}(2 \cos 2\alpha + 1).$$

Трансформација на збир и разлика на тригонометриски функции во производ

Ако во формулите за трансформација на производ во збир или разлика ставиме $x = \alpha + \beta$ и $y = \alpha - \beta$, тогаш $\alpha = \frac{x+y}{2}$ и $\beta = \frac{x-y}{2}$. Со замена, ги добиваме формулите за збир и разлика на синус:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}.$$

Пример 3. Запиши го како производ збирот, односно разликата:

а) $\sin \alpha + \cos \alpha$

б) $\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{2\pi}{5}.$

Решение. а)

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \alpha &= \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{aligned}$$

б) $\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{6} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{3\pi}{20} \cdot \sin \frac{\pi}{20}.$

Формулите $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y$ и $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y$ се добиваат на следниов начин:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}, \text{ за } x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), y \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ каде } k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}, \text{ за } x \neq k\pi, y \neq n\pi, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Задачи

1. Најди $4 \sin \left(1 + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(1 + \frac{\pi}{3} \right).$

2. Производот $\cos 7\alpha \cdot \cos 5\alpha$ трансформирај го во збир.

3. Запиши ги како збир следниве функции:

а) $\cos^2 \alpha$ б) $\sin^3 \alpha$

4. Докажи дека $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = 1$.

5. Запиши го како производ збирот, односно разликата:

а) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$ б) $\cos 73^\circ - \cos 47^\circ$ в) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ$.

6. Докажи дека:

а) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ б) $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$.

7. Докажи дека:

а) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \alpha$

б) $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \sqrt{3} \sin \alpha$.

3.11. Тригонометриски равенки

Дефиниција 1. Равенки кај кои непознатата се јавува само како аргумент на тригонометриска функција се викаат **тригонометриски равенки**.

Пример 1. Тригонометриски равенки се: $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} x + \cos x = \sin x$, $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} - 1 = 0$, но равенката $x + \sin x = 1$ не е тригонометриска.

Дефиниција 2. Решение на тригонометриска равенка се вика множеството агли изразени во радијани за кои таа преминува во точно бројно равенство.

Основни тригонометриски равенки се $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ за $a \in \mathbb{R}$.

Равенката $\sin x = a$, за $a \in \mathbb{R}$

Бидејќи $-1 \leq \sin x \leq 1$ за секој реален број x , равенката $\sin x = a$ има решение само во случај кога $-1 \leq a \leq 1$.

За $-1 < a < 1$ постојат точно два агла во интервалот $[0, 2\pi]$ чијшто синус е еднаков на a .

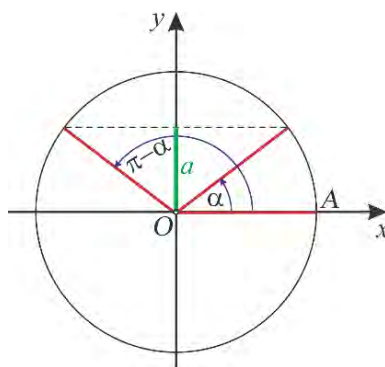
I случај: Решение на равенката $\sin x = a$, за $0 \leq a < 1$ на интервалот $[0, 2\pi]$ се два агли и тоа еден од аглиите е во I квадрант, а другиот во II квадрант (цртеж 1). Нивниот збир е π . Според тоа, ако со α го означиме аголот во I квадрант, тогаш аголот во II квадрант може да го означиме со $\pi - \alpha$. Од периодичноста на функцијата $y = \sin x$ следува дека решенија на равенката се сите реални броеви од обликот:

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ и } x_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi = -\alpha + (2k+1)\pi,$$

$$\text{каде што } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } k \in \mathbb{Z}$$

или

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ и } x_2 = -\alpha + (2k+1)\pi, \text{ каде што } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } k \in \mathbb{Z}.$$



Цртеж 1

Аголот α може да се одреди графички или со калкулатор.

Пример 1. Реши ја равенката $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Од $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следува дека решенија на равенката се:

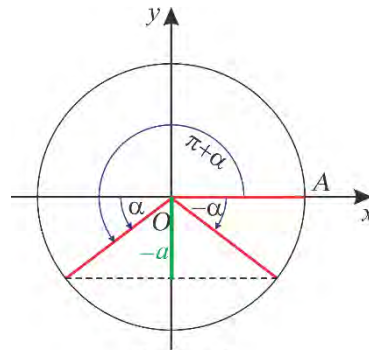
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ и } x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ за } k \in \mathbb{Z}.$$

II случај: Решение на равенката $\sin x = a$, за $-1 < a \leq 0$ на интервалот $[0, 2\pi]$ се два агли и тоа еден од аглиите е во III квадрант, а другиот во IV квадрант (цртеж 2). Ако аголот од III квадрант го означиме со $\pi + \alpha$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, тогаш аголот во IV квадрант може да го означиме со $-\alpha$. Според тоа, решенија на дадената равенка се сите реални броеви од обликот:

$$x_1 = (\pi + \alpha) + 2k\pi = \alpha + (2k+1)\pi \text{ и } x_2 = -\alpha + 2k\pi \text{ каде што } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

или

$$x_1 = \alpha + (2k+1)\pi \text{ и } x_2 = -\alpha + 2k\pi, \text{ каде што } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$



Цртеж 2

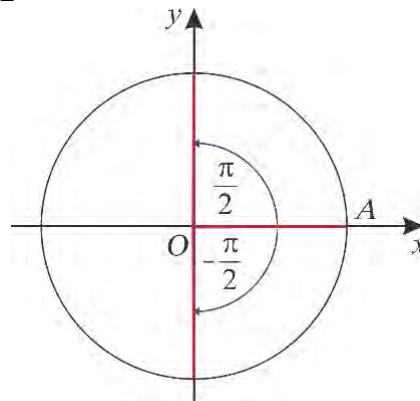
Пример 2. Реши ја равенката $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Решение. Од $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ следува дека решенија на равенката $\sin x = -\frac{1}{2}$ се:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ и } x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \diamond$$

III случај: Во случај кога $a = 1$ и $a = -1$, ги добиваме равенките $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$. Решенија на равенките се (цртеж 3):

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ и } x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Цртеж 3

Равенката $\cos x = a$, за $a \in \mathbb{R}$

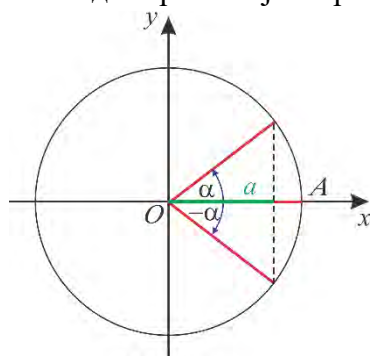
Слично како и равенката $\sin x = a$, равенката $\cos x = a$ има решение само за $-1 \leq a \leq 1$. Тогаш постојат точно два агли во интервалот $[0, 2\pi]$ чијшто косинус е еднаков на a .

I случај: Решение на равенката $\cos x = a$, за $0 \leq a < 1$, се два агли во I и IV квадрант. Ако со α го обележиме аголот во I квадрант, тогаш аголот во IV квадрант е $-\alpha$ (цртеж 4). Имајќи предвид дека функцијата $y = \cos x$ е периодична, решенија на равенката се сите реални броеви:

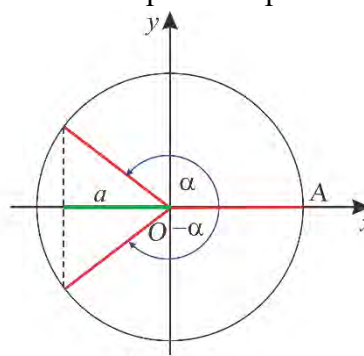
$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ и } x_2 = -\alpha + 2k\pi, \quad \text{каде } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } k \in \mathbb{Z}$$

II случај: Решение на $\cos x = a$, за $-1 < a \leq 0$, се два агли од II и III квадрант.

Ако со α го означиме аголот во II квадрант, тогаш аголот во III квадрант е $-\alpha$ (цртеж 5). Ако повторно ја земеме предвид периодичноста на функцијата $y = \cos x$, добиваме дека решенија на равенката се сите реални броеви:



Цртеж 4



Цртеж 5

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ и } x_2 = -\alpha + 2k\pi, \quad \text{каде } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Реши ги равенките:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение. а) Од $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ следува дека решенија на равенката

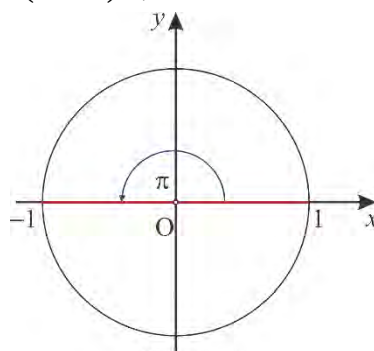
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ се сите реални броеви } x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ и } x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Од $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ следува дека решенија на равенката $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$\text{се сите реални броеви } x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ и } x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

III случај: За $a=1$ и $a=-1$ ги добиваме равенките $\cos x = 1$ и $\cos x = -1$ чиито решенија соодветно (црт. 6) се:

$$x_1 = 2k\pi \text{ и } x_2 = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

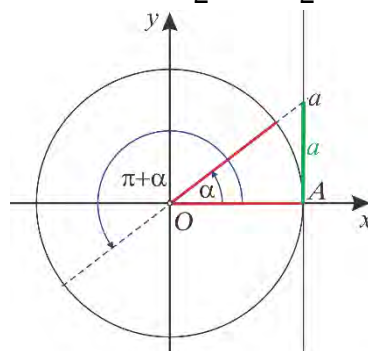


Цртеж 6

Равенките $\operatorname{tg} x = a$ **и** $\operatorname{ctg} x = a$

Равенката $\operatorname{tg} x = a$ има решение за секоја вредност на a , односно за секој реален број a постои единствен агол во интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ чиј тангенс е еднаков на a (цртеж 7). Ако тој агол го обележиме со α , тогаш решенија на дадената равенка се сите реални броеви од обликот:

$$x = \alpha + k\pi, \text{ каде } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } k \in \mathbb{Z}.$$

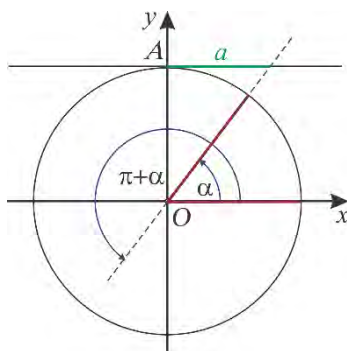


Цртеж 7

Пример 4. Реша ја равенката $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Од $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ следува дека решенија на равенката се сите реални броеви $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$.

Равенката $\operatorname{ctg} x = a$ има единствено решение за секоја вредност на a . На интервалот $(0, \pi)$ постои само еден агол за кој $\operatorname{ctg} x = a$ (црт. 8). Заради периодичноста на функцијата $\operatorname{ctg} x$, решенија на дадената равенка се сите реални броеви $x = \alpha + k\pi$, каде $0 < \alpha < \pi$, за $k \in \mathbb{Z}$.



Цртеж 8

Пример 5. Реша ја равенката $\operatorname{ctg} x = 1$.

Решение. Од $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ следува дека решенија на равенката се сите реални броеви: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

Решете ги равенките:

1. $\sin x = -\sqrt{3}$. 2. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. 6. $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 7. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$. 8. $\operatorname{ctg} x = -1$.

9. $\operatorname{tg} x = 2$. 10. $\operatorname{ctg} x = -3$. 11. $\sin x = -0,4$. 12. $\cos x = 0,6$.

3.12. Тригонометриски равенки што се сведуваат на основни

Во оваа лекција ќе ја проучиме постапката за решавање на тригонометриски равенки од облик $\sin f(x) = a$, односно $f(\sin x) = 0$ и слични на нив, каде f е некој полином. Такви се, на пример, равенките: $\sin(3x+4) = 1$, $\cos(x^2+2) = 0$, $\sin^2 x + 3\sin x - 5 = 0$ ит.н. Постапката за нивно решавање, главно се состои од сведување на основните тригонометриски равенки: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$.

Пример 1. Решете ги равенките:

а) $\sin 2x = 0$ б) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 в) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ г) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение. а) Од $\sin 2x = 0$ следува $2x = k\pi$, односно $x = \frac{k\pi}{2}$, за $k \in \mathbb{Z}$.

б) Од $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, имаме $2x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ и $2x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, односно:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ и } x_2 = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ за } k \in \mathbb{Z}.$$

в) Од $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ следува $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi$, односно

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

г) Од $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ имаме $x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, односно $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, за

$$k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Реши ја равенката:

а) $3\sin(2x-1)=1$

б) $\cos(x^2-1)=1$

Решение. а) Во равенката $3\sin(2x-1)=1$, ставаме смена $2x-1=t$, што значи дека треба да одредиме за кој агол $\sin t = \frac{1}{3}$.

Вредноста на тој агол се добива со помош на калкулатор. Постапката со која одредуваме големина на аголот t се врши со опцијата $\sin^{-1}$ од калкулаторот. Во овој случај добиваме приближно $0,33984$, па решение на равенката се:

$$t_1 = 0,33984 + 2k\pi \text{ и } t_2 = \pi - 0,33984 + 2k\pi \text{ т.е.}$$

$$2x_1 - 1 = 0,33984 + 2k\pi \text{ и } 2x_2 = \pi - 0,33984 + 2k\pi + 1, \text{ односно}$$

$$x_1 = 0,66992 + k\pi \text{ и } x_2 = 0,33008 + (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ за } k \in \mathbb{Z}.$$

б) Од $\cos(x^2-1)=1$ следува дека $x^2-1=2k\pi$, од каде добиваме дека $x = \pm\sqrt{1+2k\pi}$ за $k \in \mathbb{Z}$.

Равенката $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$, $a \neq 0$, ја решаваме со воведување смена $\sin x = t$. Добиената квадратна равенка по t : $at^2 + bt + c = 0$, при услов $D = b^2 - 4ac \geq 0$, има реални, а некогаш и еднакви меѓу себе решенија t_1, t_2 . Дадената равенка е еквивалентна со равенките: $\sin x = t_1$ или $\sin x = t_2$. Секоја од равенките погоре дава решенија за дадената равенка, под услов $|t_1| \leq 1$, односно $|t_2| \leq 1$.

Задача 1. Реши ја равенката $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Решение. Од $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, следува дека дадената равенка може да ја запишеме во еквивалентен облик: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. По воведувањето на смената $t = \sin x$, добиваме квадратна равенка по t : $2t^2 + t - 1 = 0$ чии корени $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Дадената равенка е еквивалентна на равенките $\sin x = -1$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Решенија на првата равенка се сите реални броеви од обликот

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ за } k \in \mathbb{Z}, \text{ додека решенија на втората равенка се } x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ и}$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ за } k \in \mathbb{Z}. \text{ Според тоа, решенија на дадената равенка се сите реални}$$

$$\text{броеви: } x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ и } x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 2. Реши ја равенката $\operatorname{tg}^3 x + 5\operatorname{tg}^2 x + 7\operatorname{tg} x = 0$.

Решение. Ја воведуваме смената $\operatorname{tg} x = t$. Добиената равенка $t^3 + 5t^2 + 7t = 0$ е еквивалентна на равенката $t^3 + 5t^2 + 7t = t(t^2 + 5t + 7) = 0$ која има единствено реално решение $t = 0$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $\operatorname{tg} x = 0$ чии

решенија се сите реални броеви: $x = k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$. Според тоа, реалните броеви $x = k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$ се решенија на дадена равенка. ♦

Задачи

Решете ги равенките:

1. $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$.

2. $2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0$.

3. $\cos \pi x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\cos \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

5. $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$.

6. $\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. $\operatorname{tg} 2x = -1$.

8. $\operatorname{tg} 3x = 0$.

9. $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$.

10. $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) = 1$.

11. $\operatorname{ctg} 3x = 1$.

12. $\operatorname{ctg} 5x = 0$.

13. $\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 1$.

14. $\operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$.

15. $\sin^2 x + 2 \sin x = 0$.

16. $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$.

17. $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$.

18. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$.

19. $8 \cos^2 x + 6 \sin x - 3 = 0$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Запиши ги во радијани аглиите:

а) $\alpha = 135^\circ$

б) $\alpha = 4^\circ 24'$.

2. Запиши го во степени аголот $\alpha = \frac{15\pi}{8} \operatorname{rad}$.

3. Следниве тригонометриски функции изрази ги со помош на тригонометриски функции од остар агол

а) $\sin 132^\circ$, $\sin 215^\circ$, $\sin 296^\circ$

б) $\cos 148^\circ$, $\cos 196^\circ$, $\cos 312^\circ$

в) $\operatorname{tg} 176^\circ$, $\operatorname{tg} 242^\circ$, $\operatorname{tg} 291^\circ$

г) $\operatorname{ctg} 153^\circ$, $\operatorname{ctg} 206^\circ$, $\operatorname{ctg} 234^\circ$.

4. Одреди ја вредноста на:

а) $\sin(-82^\circ)$

б) $\operatorname{tg}(-19^\circ)$

в) $\cos(-159^\circ)$

г) $\operatorname{ctg}(-296^\circ)$.

5. Одреди ја вредноста на:

а) $\sin 52^\circ + \operatorname{tg} 312^\circ - \cos 164^\circ + \operatorname{ctg} 197^\circ$

б) $\operatorname{tg} 340^\circ - \sin 78^\circ + \cos 174^\circ - \operatorname{ctg} 204^\circ$

в) $4 \sin 236^\circ + \cos 24^\circ - 3 \operatorname{tg} 133^\circ + \operatorname{ctg} 242^\circ$.

6. Одреди ја вредноста на:

а) $\sin(\alpha - \beta)$, ако $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$, $(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2})$ и $\cos \beta = \frac{24}{25}$, $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$.

б) $\cos(\alpha + \beta)$, ако $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$ и

$\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $(180^\circ < \beta < 270^\circ)$.

в) $\cos(\alpha - \beta)$, ако $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\sin \beta = \frac{2}{3}$, α и β се остри агли.

г) Одреди ја вредноста на $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, ако $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin \beta = \frac{7}{25}$, $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$.

7. Одреди ја вредноста на:

а) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{ctg} 2\alpha$, ако $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$

б) $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, ако е $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.

в) $\sin 2\alpha + \operatorname{tg} \beta$ ако $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{5}$, $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.

8. Запиши ги во производ збирите, односно разликите:

а) $\sin 62^\circ + \sin 38^\circ$

б) $\cos 60^\circ + \cos 8^\circ$

в) $\sin 64^\circ - \sin 26^\circ$

г) $\cos 74^\circ - \cos 22^\circ$.

9. Докажи го идентитетот:

а) $\frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ **б)** $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

в) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha$

г) $\frac{\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)}{\operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) - \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha)} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$

д) $\frac{\cos(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)} = -1$

е) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

10. Реши ги тригонометриските равенки:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$

б) $\cos x = 0$

в) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

г) $\operatorname{tg} x = 1$

д) $2 \cos x + 1 = 0$

е) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

ж) $\sin x + 10^\circ = \cos 55^\circ$

з) $\cos(70^\circ - x) = \sin 30^\circ$

и) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

с) $\sin x + 2 = 5 \sin x$

к) $1 + \cos x = 3 - 3 \cos x$

т) $2 \sin^2 x + \sin x = 0$

л) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

у) $\sin 2x - \cos x = 0$

ф) $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$

х) $\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

ц) $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$

ч) $\sin^2 x + 5 \cos^2 x + 2 \cos x = 3.$

4. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА ВО РАМНИНА

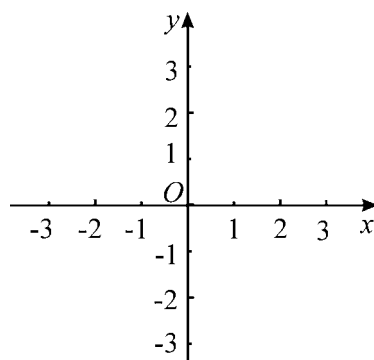
4.1. Растојание меѓу две точки

Правоаголен координатен систем во рамнина

Знаеме дека положбата на секоја точка на бројната права е еднозначно определена, со единствен реален број x , наречен **координата на точката**. Слично, користејќи правоаголен координатен систем, ќе покажеме дека положбата на секоја точка во рамнината е еднозначно определена, со единствен подреден пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати на точката**.

Правоаголен координатен систем се состои од две заемно нормални бројни оски, наречени **координатни оски**. Точката во која се сечат двете оски се вика **координатен почеток** и вообичаено се означува со O . Хоризонталната оска се вика x -оска или **апсцисна оска**, додека вертикалната оска се вика y -оска или **ординатна оска**. Рамнината во која е определен координатен систем се вика координатна рамнина.

Вообичаено, на двете координатни оски избираме една иста единица мерка. Како позитивна насока се зема насоката надесно од координатниот почеток, а на ординатната оска нагоре од координатниот почеток (цртеж 1).

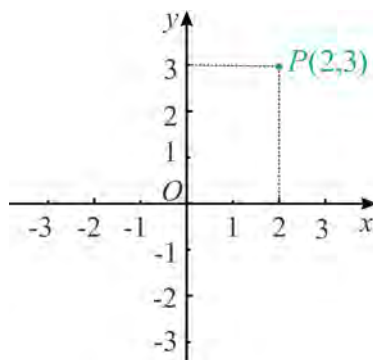


Цртеж 1

Нека P е произволна точка во координатната рамнина и нека M и N се нејзините проекции на x -оската и y -оската, соодветно. На точката M на x -оската одговара точно еден реален број x . Слично, на точката N на y -оската одговара точно еден реален број y . Според тоа положбата на точката P е напoлно определена со подредениот пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати** на точката P . Притоа, x се вика **прва координата** или **апсциса**, а y **втора координата** или **ордината** на точката P и запишуваме $P(x, y)$.

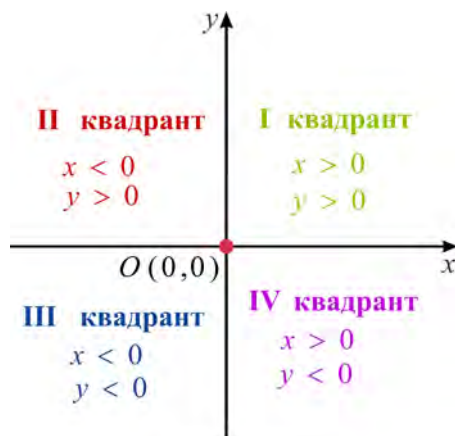
Пример 1. Точката $P(-3, 6)$ има прва координата $x = -3$ и втора координата $y = 6$. ♦

Да се конструира, односно да се нацрта точка $P(x, y)$, значи да се определи пресечната точка на нормалите на координатните оски кои минуваат низ точката P .



Цртеж 2

Пример 2. За да ја конструираме точката $P(2,3)$ цртаме нормала на x – оската низ точката со координата 2. Слично, цртаме нормала на y – оската низ точката со координата 3. Пресечната точка на нормалите е бараната точка (цртеж 2). ♦



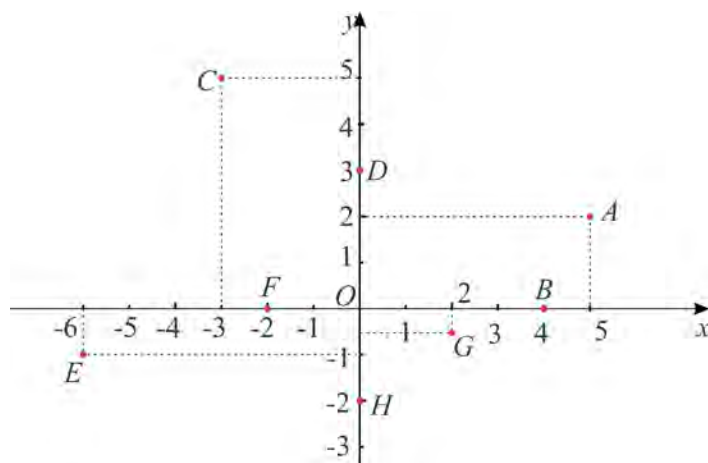
Цртеж 3

Координатните оски ја разделуваат координатната рамнина на четири делови наречени **квадранти**. Како **I квадрант** се зема делот горе десно, како **II квадрант** се зема делот горе лево, како **III квадрант** се зема делот долу лево и како **IV квадрант** се зема делот долу десно. Според тоа, произволна точка $P(x,y)$ лежи: во I квадрант ако $x > 0$ и $y > 0$; во II квадрант ако $x < 0$ и $y > 0$; во III квадрант ако $x < 0$ и $y < 0$; во IV квадрант ако $x > 0$ и $y < 0$; на x – оската ако $y = 0$; на y – оската ако $x = 0$. Бидејќи координатниот почеток лежи и на x – оската и на y – оската двете негови координати се еднакви на нула, односно $O(0,0)$ (цртеж 3).

Задача 3. Конструирај ги во рамнината точките:

- а) $A(5,2)$ б) $B(4,0)$ в) $C(-3,5)$ г) $D(0,3)$
 д) $E(-6,-1)$ е) $F(-2,0)$ ж) $G\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ з) $H(0,-2)$

а потоа определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат.



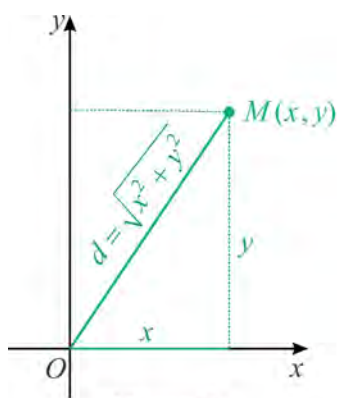
Цртеж 4

- Решение.** а) $A(5,2)$ лежи во I-от квадрант, б) $B(4,0)$ лежи на x -оската,
 в) $C(-3,5)$ лежи во II-от квадрант, г) $D(0,3)$ лежи на y -оската,
 д) $E(-6,-1)$ лежи во III-от квадрант, е) $F(-2,0)$ лежи на x -оската,
 ж) $G\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ лежи во IV-от квадрант,
 з) $H(0,-2)$ лежи на y -оската (цртеж 4). ♦

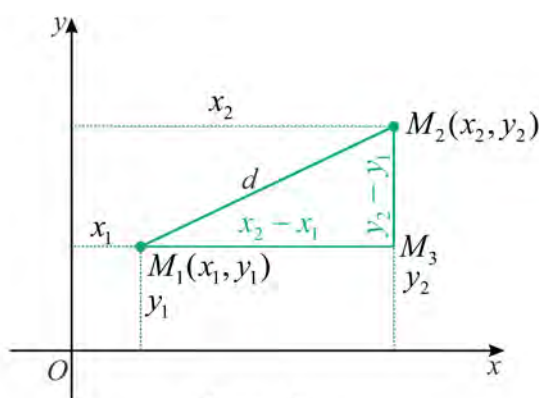
Растојание меѓу две точки

Со помош на аналитички метод ќе го решиме проблемот на пресметување на растојанието меѓу две точки во координатна рамнина. Имено растојанието d меѓу две дадени точки M_1 и M_2 е должината на отсечката M_1M_2 , односно $d = \overline{M_1M_2}$.

Да го решиме поеднаставниот случај кога една од дадените точки е координатниот почеток (цртеж 5).



Цртеж 5



Цртеж 6

Нека N е подножјето на нормалата спуштена од точката $M(x, y)$ на x -оската. Од правоаголниот триаголник ONM заради Питагоровата теорема имаме

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Пример 4. Растојанието од точката $M(3,4)$ и координатниот почеток е

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \blacklozenge$$

Да преминеме на општиот случај. Нека се дадени две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ чие растојание d треба да го најдеме (цртеж 6). Да го разгледаме правоаголниот триаголник $M_1M_2M_3$. Должините на катетите се $M_1M_3 = |x_2 - x_1|$ и $M_2M_3 = |y_2 - y_1|$, соодветно. Растојанието d меѓу точките M_1 и M_2 е должината на хипотенузата M_1M_2 , односно

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример 5. Пресметај го растојанието меѓу точките $M_1(-2,3)$ и $M_2(0,-2)$ е

$$d = \sqrt{(0 - (-2))^2 + ((-2) - 3)^2} = \sqrt{29}. \blacklozenge$$

Задача 6. Провери дали точките $A(3,-6)$, $B(-2,4)$ и $C(1,-2)$ лежат на една иста права.

Решение. Ќе ги пресметаме должините $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ за да провериме дали едната од нив е збир на другите две:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}, \quad \overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}.$$

Од $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$ следува дека дадените точки лежат на една иста права. $\blacklozenge$

Задача 7. Определи го видот на триаголникот според страните, чии темиња се $A(1,1)$, $B(2,3)$ и $C\left(1, \frac{9}{4}\right)$.

Решение. Да ги најдеме должините на неговите страни $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \overline{AC} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}, \quad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

Од $\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$ следува дека дадениот триаголник е рамнокрак. $\blacklozenge$

Задачи

1. Определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат точките:

- | | | | |
|---------------------|---|--|---------------------|
| а) $A(3,-4)$ | б) $B(-1,1)$ | в) $C(-3,-5)$ | г) $D(2,3)$ |
| д) $E(-6,0)$ | ѓ) $B\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ | е) $G\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ | ж) $H(0,-1)$ |

и определи во кој квадрант или на која оска припаѓаат.

2. Конструирај ја отсечката AB ако се познати координатите на нејзините крајни точки $A(1,4)$ и $B(5,2)$. Потоа најди ги должините m_x и m_y на нејзините ортогонални проекции на x -оската и y -оската, соодветно.

3. Конструирај го триаголникот ABC , ако се познати координатите на неговите темиња: $A(1, -3)$, $B(5, 2)$ и $C\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

4. Пресметај го растојанието d меѓу точките:

а) $M_1(1, -3)$ и $M_2(2, 6)$ б) $M_1(0, 2)$ и $M_2(0, -2)$

в) $M_1(-1, -2)$ и $M_2(2, 4)$ г) $M_1(1, 3)$ и $M_2(7, 0)$.

5. Провери дали точките $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ и $C(-5, 7)$ се темиња на триаголник.

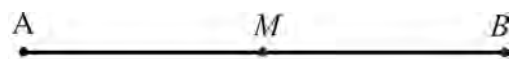
6. Најди ја ординатата на точката B , ако нејзината апсцисата е еднаква на 7, а нејзиниото растојание до точката $A(-1, 5)$ е еднакво на 10.

7. Дадени се точките $A(5, 8)$ и $B(-11, -2)$. Најди ги координатите на точката C која е симетрична на точката B во однос на точката A .

4.2. Делење на отсечка во даден однос

За точката M велиме дека ја дели отсечката AB ($A \neq B$) во однос λ , сметано од A кон B , ако $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

Пример 1. Ако M е средина на отсечката AB , тогаш имаме $\overline{AM} = \overline{MB}$, односно точката M ја дели отсечката AB во однос $\lambda = 1$, сметано од A кон B (цртеж 7). ♦



Цртеж 8



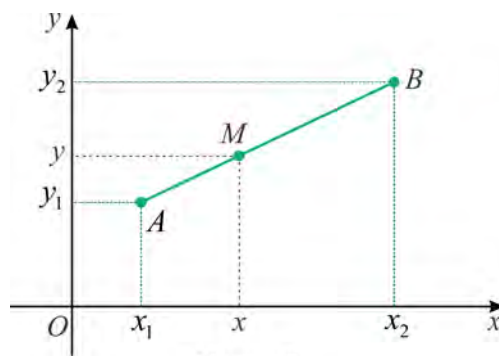
Цртеж 7

Пример 2. Нека точките P и Q ја делат отсечката AB на три еднакви дела и нека $\overline{AP} < \overline{AQ}$. Тогаш $\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{PB}$ и $\overline{AQ} = 2 \overline{QB}$, од каде заклучуваме дека точката P ја дели отсечката AB во однос $\frac{1}{2}$, а точката Q во однос 2, сметано од A кон B (цртеж 8). ♦

Често, наместо да велиме „точката M ја дели отсечката AB во однос λ , сметано од A кон B “, велиме само „точката M ја дели отсечката AB во однос λ “, сметајќи притоа дека ознаката AB , а не BA , означува дека делењето е од A кон B .

Бројот λ е поголем од нула ако и само ако точката M лежи меѓу точките A и B . Специјално, $\lambda = 1$ ако и само ако точката M е средина на отсечката AB . Понатаму, $\lambda = 0$ ако и само ако точката M се совпаѓа со точката A . Ако

$\lambda = -1$, тогаш $\overline{AM} = -\overline{MB}$, што не е можно. Според тоа $\lambda \neq -1$. Бројот λ е помал од нула и $\lambda \neq -1$ ако и само ако точката M лежи на правата AB , надвор од отсечката AB .



Цртеж 9

Да ги најдеме координатите на точката $M(x, y)$ која отсечката со крајни точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ја дели во однос λ (цртеж 9). Од $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ имаме дека $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ и $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$. Тогаш

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Ако $\lambda = \frac{p}{q}$, тогаш

$$x = \frac{qx_1 + px_2}{p + q} \quad \text{и} \quad y = \frac{qy_1 + py_2}{p + q}$$

Специјално, ако M е средина на отсечката AB тогаш $\lambda = 1$, па имаме

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Задача 3. Нека е даден триаголникот ABC чии темиња имаат координати $A(-2, -3)$, $B(6, 1)$ и $C(-4, 5)$. Најди ги координатите на тежиштето на триаголникот.

Решение. За определување на координатите на тежиштето ќе го користиме условот дека тежиштето ја дели секоја од тежишните линии AA_1 , BB_1 и CC_1 во однос 2.

Бидејќи $x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$ и $y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$ добиваме дека $A_1(2, -1)$. Тогаш $x_T = \frac{x_A + 2x_{A_1}}{1 + 2} = \frac{-4 + 4}{3} = 0$ и $y_T = \frac{y_A + 2y_{A_1}}{1 + 2} = \frac{5 - 2}{3} = 1$, па според тоа $T(0, 1)$. ♦

Задачи

1. Нека $A(3,-7)$, $B(5,2)$ и $C(-1,0)$ се темиња на триаголник. Најди ги координатите на средините на неговите страни.

2. Нека $A(1,1)$, $B(5,11)$ и $C(3,-1)$ се темиња на триаголник. Најди ја должината на медијаната повлечена од темето A .

3. Дадени се точките $A(3,1)$ и $B(8,3)$. Најди ги координатите на точката M која отсечката AB ја дели во однос:

а) $2:3$ **б)** $3:2$ **в)** $-2:3$ **г)** $-3:2$.

4. Најди ги координатите на темињата на триаголникот ABC ако се познати средините на неговите страни $P(3,-2)$, $Q(1,6)$ и $R(-4,2)$.

5. Нека точките $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$ се темиња на триаголник. Докажи дека за тежиштето на триаголникот ABC важи $T\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

4.3. Плоштина на триаголник

Да ја пресметаме плоштината на триаголник со дадени темиња $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$. Оваа задача е поедноставно да ја решиме во два чекори.

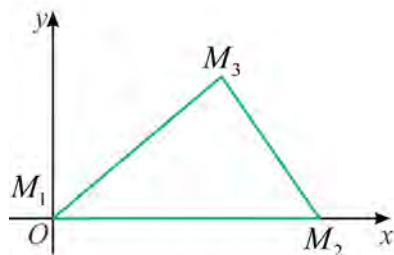
I чекор. Прво ќе ја најдеме плоштината на триаголникот ако едно негово теме е координатниот почеток, а другото теме лежи на x -оската (цртеж 10). Тогаш третото теме лежи или над x -оската или под x -оската. Користејќи ја формулата дека плоштината на триаголникот P е еднаква на полупроизводот од должината на основата и висината, добиваме дека плоштината на триаголникот

$$P = \frac{|x_1 y_2|}{2}$$

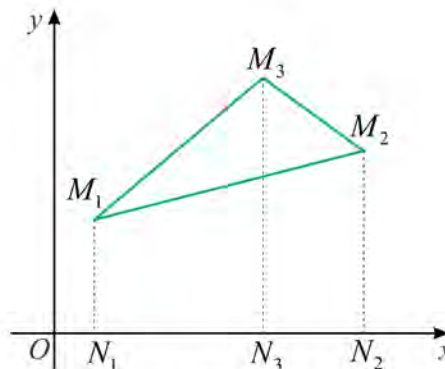
при што користиме апсолутна вредност бидејќи плоштината е позитивна величина, а x_1 или y_2 може да бидат позитивни или негативни.

II чекор. Во општ случај (црт. 11) плоштината на триаголник со дадени темиња $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ се пресметува така што од збирот на плоштините на трапезите $N_1 N_3 M_3 M_1$ и $N_3 N_2 M_2 M_3$ се одзема плоштината на трапезот $N_1 N_2 M_2 M_1$, па имаме

$$\begin{aligned} P &= \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_3) - \frac{y_2 + y_1}{2}(x_2 - x_1) = \\ &= \frac{1}{2}[y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)]. \end{aligned}$$



Цртеж 10



Цртеж 11

Ако точката M_3 е под правата определена со точките M_1 и M_2 се добива негативна вредност за плоштината на триаголникот, па треба да користиме апсолутна вредност, бидејќи плоштината е позитивна величина.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)| = \\ &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|. \end{aligned}$$

Задача 1. Пресметај ја плоштината на триаголник зададен со своите темиња $A(1,2)$, $B(-2,3)$ и $C(0,5)$.

Решение. Според формулата за пресметување на плоштина на триаголник имаме

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \\ &= \frac{1}{2} |1 \cdot (3 - 5) - 2 \cdot (5 - 2) + 0 \cdot (2 - 3)| = 4 \end{aligned}$$

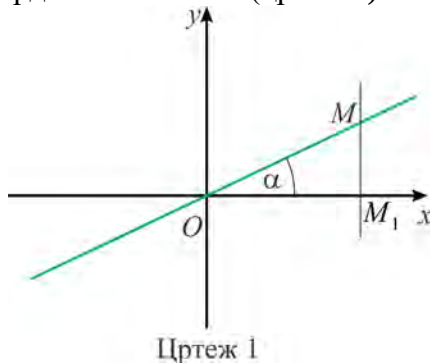
од каде следува дека плоштината на триаголникот е 4 единици. ♦

Задачи

1. Пресметај ја плоштината на триаголник со темиња $A(-3,2)$, $B(3,5)$ и $C(1,-3)$.
2. Дали точките $P_1(-3,-3)$, $P_2(3,5)$ и $P_3(6,9)$ се темиња на триаголник?
3. Испитај дали точките $M(1,-3)$, $B(3,5)$ и $C(2,1)$ лежат на иста права.
4. Најди ја плоштината на паралелограмот $ABCD$ со темиња $A(0,1)$, $B(3,7)$, $C(4,4)$ и $D(1,-2)$.
5. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, со темиња $A(1,4)$, $B(5,3)$, $C(-3,-5)$ и $D(-2,1)$.

4.4. Експлицитен облик на равенка на права

Бидејќи правата е основен геометриски поим кој не се дефинира, за да дојдеме до нејзината равенка, потребно е да искористиме некое нејзино својство. Да ја изведеме најнапред равенката на права која минува низ координатниот почеток и е различна од координатните оски (цртеж 1).



Нека $M(x, y)$ е произволна точка од правата различна од координатниот почеток. Да ги означиме со M_1 ортогоналната проекција на точката M на x -оската, и со α аголот што го зафаќа правата со позитивната насока на x -оската. Тогаш односот

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1O}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

е константен за произволна положба на точката M . Тој се означува со k и се нарекува **аглов коефициент** или **коефициент на правец** на правата. Оттука следува дека координатите на секоја точка од правата ја задоволуваат равенката

$$y = kx.$$

Според тоа, последната равенка претставува равенка на права која минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на x -оската зафаќа агол α , каде што $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Задача 1. Запиши ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на x -оската зафаќа агол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Бидејќи правата минува низ координатниот почеток, нејзината равенка е од облик $y = kx$. Од условот на задачата имаме дека $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Според тоа, бараната равенка гласи $y = x$. ♦

Нека е дадена произволна права во координатната рамнина. Тогаш можни се следниве три случаи:

- Правата ги сече двете координатни оски (цртеж 2). Нека $N(0, m)$ е пресечната точка на правата со y -оската. Притоа, ординатата на секоја точка од правата е поголема за m , ако m е позитивно, или намалена за m , ако m е негативно, во однос на точките од правата што минува низ координатниот почеток и

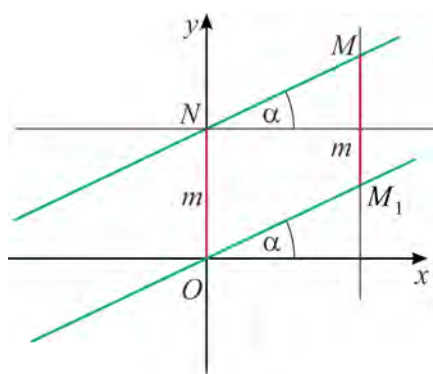
е паралелна на дадената. Двете разгледувани прави зафаќаат еднакви агли со позитивната насока на x -оската, па според тоа нивните агливи коефициенти се еднакви. Бидејќи правата којашто минува низ координатниот почеток е зададена со равенката

$$y = kx,$$

за равенката на дадената права добиваме:

$$y = kx + m,$$

каде што k е коефициентот на правецот на дадената права, а m е отсечокот на y -оската. Добиената равенка се нарекува **експлицитен облик на равенка на права**, а за правата велиме дека е зададена во **експлицитен облик**.



Цртеж 2

Задача 2. Запиши ја равенката на права што минува низ точките $M(2, -3)$ и $N(5, 6)$.

Решение. Дадените точки имаат различни апсциси и ординати, па според тоа бараната равенка на права има облик $y = kx + m$, каде што k е агливиот коефициент на правата, а m е отсечокот на y -оската. Според условот на задачата, точките $M(2, -3)$ и $N(5, 6)$ се точки од правата, па нивните координати ја задоволуваат равенката $y = kx + m$. Така доаѓаме до системот
$$\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$$
 чии што решенија се $k = 3$ и $m = -9$. Според тоа, бараната равенка на права гласи $y = 3x - 9$. ♦

Имајќи го предвид геометриското значење на агливиот коефициент и отсечокот на ординатната оска во експлицитниот облик на равенка на права може да заклучиме дека:

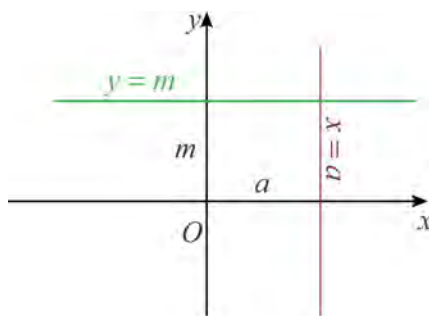
- а)** две прави имаат еднакви агливи коефициенти ако и само ако се паралелни;
- б)** две прави имаат еднакви отсечоци на ординатните оски ако и само ако ја сечат ординатната оска во една иста точка.

• Правата е паралелна со x -оската или се совпаѓа со x -оската (цртеж 3). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од x -оската. Бидејќи растојанието од x -оската на една точка, всушност, е нејзината ордината, може да

заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со m , за равенката на правата добиваме

$$y = m$$

Оваа положба на правата може да се третира како специјален случај на претходниот. Имено, во овој случај правата зафаќа агол $\alpha = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ со позитивната насока на x -оската, па според тоа агловиот коефициент $k = 0$. Специјално равенката на x -оската е $y = 0$.



Цртеж 3

• Правата е паралелна со y -оската или се совпаѓа со y -оската (цртеж 3). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од y -оската. Бидејќи растојанието од y -оската на една точка, всушност, е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со a , за равенката на правата добиваме

$$x = a$$

Специјално y -оската е зададена со равенката $x = 0$.

Задача 3. Каква е положбата на правите $x = 2$ и $y = 3$ во координатната рамнина?

Решение. Правата $x = 2$ е паралелна на y -оската и секоја нејзина точка е на растојание од 2 единици од неа, додека правата $y = 3$ е паралелна на x -оската и секоја нејзина точка е на растојание од 3 единици од неа. ♦

Задачи

1. Провери дали точките $M(-1, 1)$, $N(2, -3)$ и $P(2, 2)$ се точки од правата $y = -x + 4$.

2. Најди ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на x -оската зафаќа агол

а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ б) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ в) $\alpha = \pi$.

3. Најди ги агловиот коефициент и отсечокот на y -оската на правата зададена со:

а) $y = 2x - 3$ б) $y = -x + 3$ в) $y = -2$ г) $y = \sqrt{3}x$.

4. Запиши ја равенката на правата која со позитивната насока на x – оската зафаќа агол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и отсечокот на ординатната оска и е еднаков на $-\frac{1}{2}$.

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точката $A(-3, 2)$ и со позитивната насока на x – оската зафаќа агол $\alpha = 135^\circ$.

4.5. Општ облик на равенка на права

Во претходната лекција за равенка на права во координатната рамнина добивме равенка од прв степен по променливите x и y . Во оваа лекција ќе испитаме што претставува општа равенка од прв степен со две променливи x и y , односно равенка од обликот:

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Претпоставуваме дека $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Навистина, ако $A = B = 0$, тогаш дадената равенка се сведува на равенката $C = 0$. Во тој случај, ако $C \neq 0$ не постојат точки во рамнината кои ја задоволуваат равенката, додека, ако $C = 0$, сите точки во рамнината ја задоволуваат равенката.

- Ако $A = 0$, тогаш $B \neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $y = -\frac{C}{B}$. Како што знаеме, геометриското место на точки во рамнината коишто ја задоволуваат последната равенка е права паралелна со x – оската и минува низ точката $M\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

- Ако $B = 0$, тогаш $A \neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $x = -\frac{C}{A}$. Геометриското место на точки во рамнината кои ја задоволуваат последната равенка е права која што е паралелна со y – оската и минува низ точката $N\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

- Ако $A \neq 0$ и $B \neq 0$, тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ којашто е равенка на права во експлицитен облик со аглов коефициент $k = -\frac{A}{B}$ и отсечок на y – оската $m = -\frac{C}{B}$.

Од направената дискусија може да заклучиме дека равенката од облик

$$Ax + By + C = 0$$

е равенка на права, наречена **општ облик на равенка на права**.

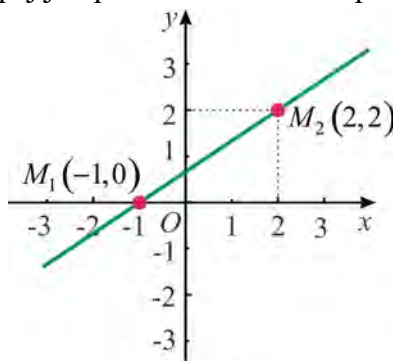
Задача 1. Доведи ја во општ облик равенката на правата $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $\frac{1}{2}x + y - 3 = 0$, односно со равенката $x + 2y - 6 = 0$.

Задача 2. Дадена е равенката на права $3x + 3y - 5 = 0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на x -оската и отсечокот на y -оската.

Решение. Ако дадената равенка ја решиме според y ја добиваме равенката $y = -x + \frac{5}{3}$, која е еквивалентна на дадената, односно претставува равенка на една иста права во рамнината. Од $k = \operatorname{tg} \alpha = -1$ следува дека $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ и $m = \frac{5}{3}$. ♦

Задача 3. Конструирај ја правата зададена со равенката $2x - 3y + 2 = 0$.



Цртеж 1

Решение. За да ја решиме поставената задача, доволно е да конструираме две точки од правата а потоа низ нив да ја конструираме правата (цртеж 1). Избираме две произволни вредности за x , а потоа ги пресметуваме соодветните вредности за y . Во овој случај згодно е една избрана вредност да биде, на пример, $x_1 = 2$, бидејќи во тој случај добиваме целобројна вредност за y , $y_1 = 2$. Слично, може да избереме вредност за x , $x_2 = -1$, од каде добиваме дека $y_2 = 0$. Притоа, треба да водиме сметка разликата меѓу избраните вредности за x да биде доволно голема, така што добиените точки да се доволно раздалечени. ♦

Задачи

1. Доведи ги во општ облик следниве равенки на права:

а) $y = 2x - 3$

б) $y = -4$

в) $x = 3$.

2. Најди ги коефициентот на правецот и отсечокот на ординатната оска на правите:

а) $2x - y + 3 = 0$

б) $5x + 2y - 3 = 0$

в) $3x + 8y + 16 = 0$.

3. Дадена е равенката на права $x + y - 3 = 0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на x -оската и отсечокот на y -оската.

4. Конструирај ги правите зададени со равенките:

a) $y = 3x + 1$

6) $x = \sqrt{2}$

B) $y = \pi$

г) $y = 2x + 2$

д) $y = \frac{1}{3}x - 2$

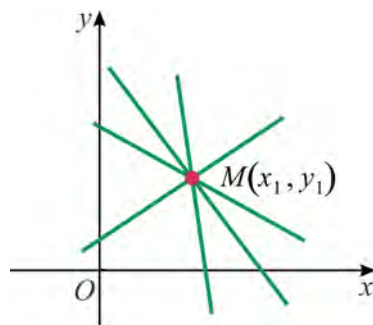
ř) $x = 0,5y - 1$.

5. Најди ги знаците на коефициентите A и B во равенката на правата $Ax + By + C = 0$, ако таа зафаќа остар агол со x -оската.

4.6. Равенка на права низ една точка

Нека $M(x_1, y_1)$ е фиксирана точка во координатната рамнина (цртеж 1). Низ дадената точка минуваат безброј прави и секоја од нив има општа равенка

$$Ax + By + C = 0.$$



Цртеж 2

Бидејќи точката M лежи на правата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентите A и B ги добиваме равенките на различните прави низ точката M .

Од сите прави кои минуваат низ точката M постои единствена права која е паралелна на y -оската. Нејзината равенка гласи $x = x_1$. Единствено таа права нема аглов коефициент и нема отсечок на y -оската, па според тоа оваа права не може да се зададе во експлицитен облик. Секоја друга права низ точката M има експлицитна равенка

$$y = kx + m.$$

Бидејќи точката M лежи на правата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството

$$y_1 = kx_1 + m.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентот k , ги добиваме равенките на различните прави низ точката M , освен правата паралелна со y -оската.

Задача 1. Запиши ја равенката на права која минува низ точката $M(-3, 2)$ и со позитивната насока на x -оската зафаќа агол $\alpha = 135^\circ$.

Решение. Било која права што минува низ точката M има равенка $y - 2 = k(x + 3)$. Бидејќи бараната права со x -оската зафаќа агол $\alpha = 135^\circ$, таа има аглов коефициент $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Тогаш бараната равенка на права гласи $y - 2 = -(x + 3)$, односно $x + y + 1 = 0$. ♦

Задача 2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(4, 6)$ и е паралелна со правата $3x + 2y - 25 = 0$.

Решение. Дадената равенка на права е во општ облик. Ако ја трансформираме во експлицитен облик, ја добиваме равенката на права $y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2}$, со аглов коефициент $k = -\frac{3}{2}$. Бидејќи бараната права и дадената права се паралелни тие зафаќаат еднакви агли со позитивната насока на x -оската, па нивните аглови коефициенти се еднакви. Според тоа, равенката на бараната права гласи $y - 6 = -\frac{3}{2}(x - 4)$, односно $3x + 2y - 24 = 0$. ♦

Задачи

1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-2, 1)$ и има аглов коефициент $k = -3$.

2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(4, -7)$ и со позитивната насока на x -оската зафаќа агол $\alpha = 135^\circ$.

3. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(7, -3)$ и е паралелна со правата:

а) $y = -2x + 1$

б) $y = x + \frac{1}{2}$

в) $y = \frac{3}{2}x + 1$.

4. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(3, -1)$ и е паралелна на

- а) апсцисната оска б) правата $y = 3x$ в) правата $y = x$.

5. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(1, -2)$ и е паралелна на правата

- а) $x + y - 5 = 0$ б) $3x + 6y - 1 = 0$ в) $x - 3y = 0$.

4.7. Равенка на права низ две точки

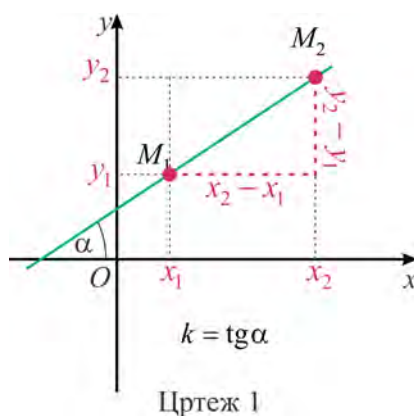
Користејќи ја равенката на права низ една точка, може лесно да ја најдеме равенката на права која минува низ две дадени точки.

Пример 1. Да ја запишеме равенката на правата која минува низ точките $M_1(-12, 5)$ и $M_2(8, -3)$.

Снопот прави со центар во M_1 има равенка $y - 5 = k(x + 12)$. Бидејќи бараната права минува низ точката M_2 , нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството $-3 - 5 = k(8 + 12)$, од каде што добиваме дека $k = -\frac{2}{5}$. Според тоа, бараната равенка на права е $y - 5 = -\frac{2}{5}(x + 12)$, односно

$$2x + 5y - 1 = 0. \blacklozenge$$

Примерот што го разгледавме ни ја открива постапката за наоѓање равенка на права зададена со две точки. Нека се дадени точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (цртеж 1). Ќе ја најдеме равенката на правата што минува низ дадените точки, односно правата M_1M_2 .



• Ако $x_1 = x_2$, тогаш правата M_1M_2 е нормална на x -оската, па нејзината равенка во тој случај гласи

$$x = x_1$$

• Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш равенката на било која права низ точката M_1 гласи

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Бидејќи правата M_1M_2 минува низ точката M_2 нејзините координати го задоволуваат равенството

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Тогаш агловиот коефициент на правата M_1M_2 изнесува

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ако вредноста за k ја замениме во равенката на снопот прави, ја добиваме **равенката на права низ двете дадени точки**

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Од равенката на права низ две дадени точки можеме да го изведеме **условот за колинеарност на три точки**. Имено, трета точка $M_3(x_3, y_3)$ лежи на правата определена со точките M_1 и M_2 ако и само ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата определена со двете дадени точки, односно равенката

$$y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)$$

Задача 2. Точките $A(-1, -2)$, $B(1, 3)$ и $C(-2, 4)$ се темиња на даден триаголник. Најди ги равенките на медијаните на триаголникот.

Решение. Да ги означиме со L , M и N средините на страните BC , CA и AB , соодветно. Тогаш за нивните координати добиваме

$$L\left(\frac{x_B + x_C}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7}{2}\right), \quad M\left(\frac{x_C + x_A}{2} = -\frac{3}{2}, \frac{y_C + y_A}{2} = 1\right) \text{ и} \\ N\left(\frac{x_A + x_B}{2} = 0, \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Медијаната } AL \text{ има аглов коефициент } k_{AL} = \frac{y_L - y_A}{x_L - x_A} = \frac{\frac{7}{2} - (-2)}{-\frac{1}{2} - (-1)} = 11.$$

Тогаш нејзината равенка гласи $y - y_A = 11(x - x_A)$, односно $11x - y + 9 = 0$.

Слично, добиваме дека медијаната BM има равенка $4x - 5y + 11 = 0$, а медијаната CN има равенка $7x + 4y - 2 = 0$. ♦

Задачи

1. Најди го коефициентот на правецот на правата која минува низ точките:

а) $M_1(-1, 4)$ и $M_2(4; -3)$ **б)** $M_1(0, -2)$ и $M_2(-1; 3)$ **в)** $M_1(1, 4)$ и $M_2(-2, 4)$.

2. Запиши ја равенката на правата која што минува низ точките $M_1(-1, 4)$ и $M_2(4, -3)$.

3. Дали точките $M_1(0, 3)$, $M_2(2, 6)$ и $M_3(-1, -3)$ се колинеарни?

4. Запиши ја равенката на правата која минува низ координатниот почеток и тежиштето на триаголникот ABC , ако $A(2, -1)$, $B(4, 5)$ и $C(-3, 2)$.

5. Точките $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ и $C(0, 4)$ се темиња на даден триаголник. Најди ги равенките на правите, од кои секоја минува низ едно теме и е паралелна на спротивната страна.

4.8. Сегментен облик на равенка на права

Како што веќе видовме, равенката

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

претставува равенка на права во координатната рамнина. Притоа, правата минува низ координатниот почеток ако и само ако $C = 0$. Коефициентот $A = 0$ ако и само ако правата е паралелна на x -оската, додека коефициентот $B = 0$ ако и само ако правата е паралелна на y -оската.

Претпоставуваме дека дадената права не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниту една координатна оска. Тогаш за коефициентите од нејзината равенка важи $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Ако равенката (1) ја помножиме

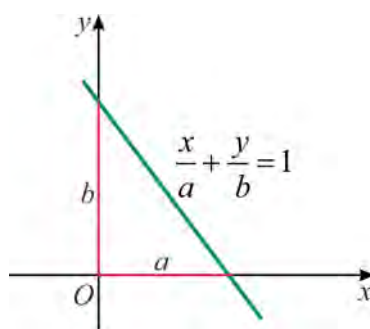
со бројот $-\frac{1}{C}$, таа го добива обликот

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Ако ставиме $a = -\frac{C}{A}$ и $b = -\frac{C}{B}$, тогаш равенката го добива обликот

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2)$$

наречен **сегментен облик на равенка на права**.



Цртеж 1

Да го испитаме геометриското значење на параметрите a и b . Ако во равенката (2) ставиме $y = 0$, а потоа $x = 0$, ги добиваме пресечните точки $P(a, 0)$ и $Q(0, b)$ на правата со x -оската, односно y -оската. Според тоа броевите a и b по апсолутна вредност се еднакви на должините на отсечките што ги отсекува правата од x -оската и y -оската, соодветно. Нив ги нарекуваме **отсечоци** или **сегменти** на оските (цртеж 1).

Задача 1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на права:

а) $x - 3y - 6 = 0$ **б)** $y = 3x - 4$

а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од координатните оски.

Решение. а) I начин: Дадената равенка на права е равенка од општ облик.

Ако равенката ја помножиме со $-\frac{1}{C} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$, ја добиваме равенката $\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$ која е еквивалентна со равенката

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1$$

која е запишана во сегментен облик и е еквивалентна на дадената.

II начин: Во дадената равенка $A = 1$, $B = -3$ и $C = -6$. Тогаш имаме дека

$a = -\frac{C}{A} - \frac{-6}{1} = 6$ и $b = -\frac{C}{B} = -\frac{-6}{-3} = -2$, од каде што го добиваме сегментниот облик на равенката

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Должината на сегментот на x -оската изнесува 6 единици, додека должината на сегментот на y -оската изнесува 2 единици.

б) Дадената равенка ја доведуваме во општ облик $2x - y - 4 = 0$, а потоа постапувајќи како во претходниот случај, го добиваме сегментниот облик

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Должината на сегментот на x -оската изнесува 2 единици, додека должината на сегментот на y -оската изнесува 4 единици. ♦

Задача 2. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $2x - 5y - 10 = 0$.

Решение. Бидејќи координатните оски се сечат под прав агол, бараниот триаголник е правоаголен со теме при правиот агол во координатниот почеток, катетите лежат на координатните оски, а хипотенузата на дадената права. Знаеме дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на неговите катети, а тоа се токму должините на сегментите отсечени на координатните оски. Ако равенката на правата ја трансформираме до сегментен облик, ја добиваме равенката

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1.$$

Според тоа, должините на сегментите се 5 единици и 2 единици од каде што следува дека бараниот правоаголен триаголник има катети 5 единици и 2 единици. Тогаш неговата плоштина изнесува

$$P = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

квадратни единици. ♦

Задачи

1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на права:

а) $3x - 2y + 12 = 0$

б) $y = -x + 1$

в) $y = 4x - 2$

а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од координатните оски.

2. Најди ја вредноста на параметарот k за која збирот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $2x + 5ky - 3 = 0$ е еднаков на 10.

3. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $x + 2y - 6 = 0$.

4. Низ точката $M(3, 2)$ повлечи права која отсекува еднакви по должина сегменти од координатните оски.

5. Спореди ги сегментите a и b што на координатните оски ги отсекува правата $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ која со позитивната насока на x -оската зафаќа агол

а) $\frac{\pi}{4}$

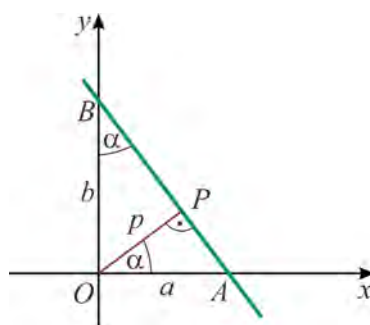
б) $\frac{3\pi}{4}$

в) $\frac{\pi}{3}$.

4.9. Нормален облик на равенка на права

Во оваа лекција ќе изучиме уште еден начин на задавање права во координатната рамнина која не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниту една координатна оска.

Од координатниот почеток спуштаме нормала на дадената права и со p ја означуваме должината на отсечката OP , а со α аголот што го зафаќа таа нормала со x -оската (цртеж 1).



Цртеж 1

Од правоаголните триаголници OAP и BOP добиваме дека

$$a \cos \alpha = p \text{ и } b \sin \alpha = p.$$

Ако во сегментниот облик на равенката на правата $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ замениме

$$a = \frac{p}{\cos \alpha} \text{ и } b = \frac{p}{\sin \alpha}$$

по средувањето равенката добива облик

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

наречен **нормален облик на равенка на права**.

Аголот α е аголот што го зафаќа нормалата на правата со позитивната насока на x -оската, а p е растојанието на правата од координатниот почеток. Ако аголот α е константен, тогаш за различни вредности на p добиваме фамилија паралелни прави кои се нормални на правата која зафаќа агол α со позитивната насока на x -оската.

Се поставува прашањето како да го определиме нормалниот облик на равенка на права ако правата е зададена со равенка во општ облик

$$Ax + By + C = 0.$$

Дадената равенка ќе ја помножимо со реален број $M \neq 0$, наречен **нормирачки множител** за кој важи

$$M \cdot A = \cos \alpha \text{ и } M \cdot B = \sin \alpha.$$

Ако последните две равенства ги квадрираме, а потоа ги собереме, добиваме

$$(M \cdot A)^2 + (M \cdot B)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

од каде што следува дека $M^2(A^2 + B^2) = 1$, односно

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знакот на нормирачкиот множител M го наоѓаме од условот $M \cdot C = -p$. Последното равенство ќе го запишеме во облик $p = -M \cdot C$. Бидејќи p е позитивно, знакот на M треба да го избираме така што изразот $-M \cdot C$ да биде позитивен. Според тоа знакот на нормирачкиот множител M треба да биде спротивен од знакот на C . Така го добиваме нормалниот облик на равенката на права

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Задача 1. Запиши ја во нормален облик равенката на права $3x - 4y + 10 = 0$.

Решение. Дадената равенка на права е равенка од општ облик со коефициенти $A = 3$, $B = -4$ и $C = 10$. Бидејќи коефициентот C е позитивен, равенката ја помножимо со бројот

$$M = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Тогаш нормалниот облик на равенката на дадената права гласи

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0. \blacklozenge$$

Задачи

1. Која од следниве равенки на права претставува равенка на права во нормален облик:

а) $3x - 2y + 7 = 0$

б) $x + \frac{1}{2}y - 3 = 0$

в) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}y - 1 = 0$

г) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 3 = 0$

д) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$

ѓ) $x - 5 = 0.$

2. Најди го нормирачкиот множител на равенките:

а) $2x - y - 3 = 0$

б) $x + 10y - 33 = 0$

в) $x + 4y + 10 = 0.$

3. Запиши ги во нормален облик следниве равенки на права:

а) $4x - 3y + 10 = 0$

б) $5x + 12y - 39 = 0$

в) $6x + 8y - 15 = 0$

г) $x - 2y + 3 = 0$

д) $y - \sqrt{3}x = 4$

ѓ) $x \cos 10^\circ + y \sin 10^\circ + 4 = 0.$

4. Запиши ги во нормален облик следниве равенки на права:

а) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

б) $\frac{x}{5} = y - 2$

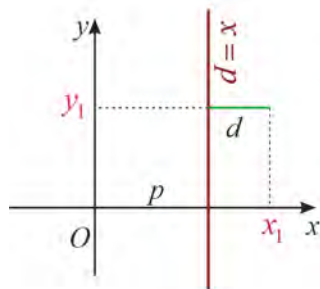
в) $y = x - 3.$

4.10. Растојание од точка до права

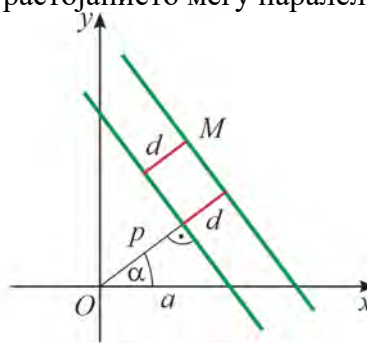
Нашата следна задача е да пресметаме растојание од дадена точка до дадена права во координатната рамнина. Како што знаеме, растојанието од точка до права е еднакво на должината на нормалата спуштена од точката кон правата.

• Ако правата е нормална на x -оската, тогаш растојанието d од точката $M(x_1, y_1)$ до правата $x = p$ изнесува $d = |x_1 - p|$ (цртеж 1).

• Нека правата е во општа положба (цртеж 2). Низ дадената точка $M(x_1, y_1)$ поставуваме права паралелна на дадената. Тогаш растојанието од точката M до правата ќе биде еднакво на растојанието меѓу паралелните прави.



Цртеж 1



Цртеж 2

- Ако равенката на дадената права ја запишеме во нормален облик

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

тогаш равенката на правата паралелна на неа е

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0,$$

каде што p_1 се определува од условот правата да минува низ точката $M(x_1, y_1)$, односно

$$p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha.$$

Растојанието од точката $M(x_1, y_1)$ до правата е еднакво на растојанието меѓу паралелните прави, односно $d = |p_1 - p| = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|$ или

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|$$

Од последното равенство непосредно следува дека растојанието од дадената точка до правата се добива на тој начин што во левата страна од нормалната равенка на правата, запишана во облик

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

ги заменуваме координатите на точката, а потоа се зема апсолутна вредност од добиениот број. Притоа, знакот на изразот го има следново геометриско значење:

- Ако растојанието од точката до правата пред земањето на апсолутната вредност е позитивен број, тогаш точката и координатниот почеток се на различни страни од правата;
- Ако растојанието од точката до правата пред земањето на апсолутната вредност е негативен број, тогаш точката и координатниот почеток се на една иста страна од правата.

Ако равенката на правата е зададена во општ облик

$$Ax + By + C = 0$$

тогаш равенката треба да ја трансформираме во нормален облик, односно ќе ја помножине со нормирачкиот множител

$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C . Тогаш растојанието од дадената точка до правата се добива така што во левата страна од нормалната равенка на правата, запишана во облик

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

ги заменуваме координатите на точката, а потоа се зема апсолутна вредност од добиениот број. Конечно добиваме дека

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Задача 1. Најди ги растојанијата од точките $A(2,1)$ и $B(-2,4)$ до правата $4x - 3y + 15 = 0$.

Решение. За да го најдеме растојанието од дадената точка до правата, првин треба да ја трансформираме равенката во нормален облик. За таа цел равенката ја множиме со нормирачкиот множител

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\pm 5}.$$

Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C , па во овој случај $M = -\frac{1}{5}$. Тогаш нормалната равенка на правата гласи

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0.$$

Ако сега ги замениме координатите на дадената точка, добиваме

$$d = \left| -\frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 1 - 3 \right| = |-4| = 4.$$

Бидејќи знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше негативен, точката A и координатниот почеток се на иста страна од правата.

Аналогно, за точката B добиваме

$$d = \left| -\frac{4}{5} \cdot (-2) + \frac{3}{5} \cdot 4 - 3 \right| = |1| = 1.$$

Во овој случај знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше позитивен, па точката B и координатниот почеток се на различни страни од правата. ♦

Задача 2. Кои точки од рамнината се на растојание $d = \sqrt{2}$ од правата $x - y + 1 = 0$.

Решение. Точката $M(x, y)$ е на растојание $d = \sqrt{2}$ од правата $x - y + 1 = 0$, ако важи

$$\frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

односно $|x - y + 1| = 2$ од каде што следува дека $x - y + 1 = -2$ или $x - y + 1 = 2$.

Според тоа, на растојание $\sqrt{2}$ од правата $x - y + 1 = 0$ се точките од правите

$$y = x - 1 \text{ и } y = x + 3. \text{ ♦}$$

Задачи

1. Најди го растојанието од точката $A(-5, -1)$ до правата $4x + 3y + 30 = 0$. Дали дадената точка и координатниот почеток се на иста страна од правата?

2. Најди го растојанието на правата $9x - 12y + 10 = 0$ од координатниот почеток.

3. Определи која од точките $M(-3, 1)$ и $N(5, 4)$ е на помало растојание од правата $x - 2y - 5 = 0$. Покажи дека дадената права не ја сече отсечката MN .

4. Најди ги висините на триаголникот ABC , ако $A(3, 5)$, $B(7, -4)$ и $C(-11, -13)$.

5. Најди ја равенката на правата која е на растојание $d = 5$ од точката $C(4, 3)$, и отсекува еднакви сегменти на координатните оски.

6. Од сите прави паралелни на правата $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$, најди ја онаа која е на растојание $d = 5$ од точката $A(2, 3)$.

4.11. Заемна положба на две прави

Како што знаеме, две прави во рамнина може да се сечат, да се паралелни или да се совпаѓаат. Нека во координатната рамнина се дадени две прави со своите општи равенки:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Во зависност од коефициентите на системот определен со дадените равенки можни се следните три случаи.

- Ако $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, односно

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

тогаш системот има единствено решение

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

односно дадените прави **се сечат** во точката (x_0, y_0) .

Задача 1. Покажи дека правите $2x - y - 5 = 0$ и $x + 3y + 1 = 0$ се сечат и определи ги координатите на пресечната точка.

Решение. Во равенките на правите $2x - y - 5 = 0$ и $x + 3y + 1 = 0$ имаме дека $A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $B_1 = -1$, $B_2 = 3$, $C_1 = -5$ и $C_2 = 1$, од каде што заклучуваме дека

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} = \frac{B_1}{B_2}$$

што значи дека правите се сечат. Координатите на пресечната точка се

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{1 \cdot 1 - 3 \cdot (-5)}{2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1} = \frac{16}{7}, \quad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{-1 \cdot (-5) - 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1} = \frac{3}{7}. \blacklozenge$$

- Ако $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, а $C_1B_2 - C_2B_1 \neq 0$ и $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$, односно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

тогаш системот нема решение, што значи правите **се паралелни**.

- Ако $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$ и $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$, односно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

тогаш системот има бесконечно многу решенија, што значи правите **се совпаѓаат**.

Задача 2. Покажи дека правите

а) $3x - 2y + 5 = 0$ и $9y - 6x - 1 = 0$ се паралелни.

б) $4x + 2y - 3 = 0$ и $8y + 4x - 6 = 0$ се совпаѓаат.

Решение. а) Од $\frac{3}{9} = \frac{-2}{-6} \neq \frac{5}{-1}$, следува дека правите се паралелни.

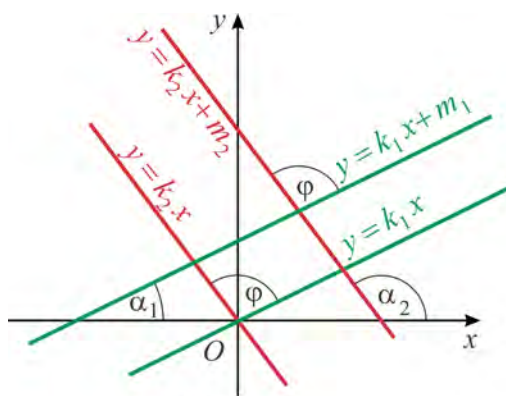
б) Од $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$, следува дека правите се совпаѓаат. ♦

Во продолжение ќе научиме како да пресметуваме агол меѓу две прави и ќе го изведеме условот за нормалност на две прави. Аголот меѓу две дадени прави наједноставно се пресметува ако правите се зададени со своите експлицитни равенки

$$y = k_1x + m_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + m_2.$$

Бидејќи аголот ϕ под кој се сечат правите не се менува при translација на правите, аголот што го зафаќаат дадените прави е еднаков на аголот што го зафаќаат правите (цртеж 1):

$$y = k_1x \quad \text{и} \quad y = k_2x.$$



Цртеж 1

Тогаш $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$. Ако на двете страни од равенството примениме тангенс добиваме

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Ако знаеме дека

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1 \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$$

добиваме дека

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Ако едната од двете прави е паралелна со y -оската, тогаш аголот меѓу нив е $\frac{\pi}{2} - \alpha$, каде што α е аголот што го зафаќа другата права со позитивната насока на x -оската.

Задача 3. Најди го аголот меѓу правите $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0$.

Решение. За првата права коефициентот на правецот $k_1 = 2$, а за втората права $k_2 = -3$. Според тоа, имаме дека $\operatorname{tg} \phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-3 - 2}{1 + 2 \cdot (-3)} = 1$, од каде што следува дека $\phi = \frac{\pi}{4}$. ♦

Ако правите се нормални, тогаш $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}$, од каде што следува дека $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Според тоа, **условот за нормалност на две прави** гласи

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Ако едната од двете прави е паралелна со y -оската, тогаш тие се нормални ако и само ако другата права е паралелна со x -оската.

Задача 4. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $M(-1, 1)$ и е нормална на правата чија равенка е $3x - y + 2 = 0$.

Решение. Равенката на снопот прави низ точката M гласи $y - 1 = k(x + 1)$. Треба да ја определиме равенката на онаа права од снопот која е нормална на дадената права, односно на правата $y = 3x + 2$. Од условот за нормалност на две прави, добиваме дека $k = -\frac{1}{3}$. Според тоа равенката на бараната права гласи

$$x + 3y - 2 = 0. \quad \blacklozenge$$

Задача 5. Равенките на правите на кои лежат страните BC , CA и AB на триаголникот ABC се $3x - 5y + 15 = 0$, $x + 3y + 5 = 0$ и $5x + y - 3 = 0$, соодветно. Најди ги равенките на правите на кои лежат висините на триаголникот.

Решение. Системот од равенки на страните AB и AC

$$\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

има решение $x=1$ и $y=-2$. Според тоа темето A има координати $A(1,-2)$. Слично добиваме дека $B(0,3)$ и $C(-5,0)$.

Висината AA_1 на триаголникот спуштена од темето $A(1,-2)$ кон страната BC има равенка $y+2=k(x-1)$. Правата на која лежи страната BC има аглов коефициент $k_{BC} = \frac{3}{5}$. Таа е нормална на правата на која лежи висината AA_1 .

Според тоа, $k = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{5}{3}$. Тогаш равенката на висината AA_1 гласи

$$y+2 = -\frac{5}{3}(x-1), \text{ односно } 5x+3y+1=0.$$

На сличен начин ги добиваме равенките на правите на кои лежат висините спуштени од темињата B и C . ♦

Задачи

1. Востанови кои од следниве прави се сечат, кои се паралелни, а кои се совпаѓаат. Во случај кога правите се сечат, најди ја пресечната точка.

а) $3x-2y+1=0$ и $2x+5y-12=0$

б) $3x+y-17=0$ и $6x+2y+12=0$

в) $2x-y+3=0$ и $6x-3y+9=0$.

2. Најди ги вредностите на коефициентите A и B во равенките на правите $Ax-4y-2=0$ и $2x-By+1-B=0$, при кои правите се совпаѓаат.

3. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $A(-2,3)$ и е паралелна на правата $5x-6y+7=0$.

4. Најди го аголот меѓу правите $2x-y+7=0$ и $3x+y+10=0$.

5. Кои од следниве прави се заемно нормални:

а) $2x-3y=0$ и $3x+2y=0$

б) $x-2=0$ и $y+5=0$

в) $y=kx+b$ и $y=-kx$

г) $x-2y+1=0$ и $2x-y=0$

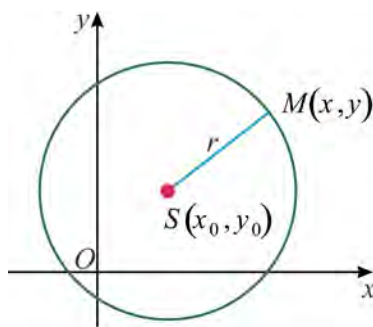
д) $5x-6y+7=0$ и $6x+5y-1=0$;

ѓ) $x+y=2$ и $y=x+3$?

6. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $A(3,15)$ и е нормална на правата $3x-5y+8=0$.

4.12. Кружница

Дефиниција. Кружница е геометриското место на сите точки во рамнината кои се еднакво оддалечени од дадена точка S во рамнината.



Цртеж 1

Точката S се нарекува **центар** на кружницата. За произволна точка M од кружницата, отсечката SM се нарекува **полупречник** или **радиус на кружницата**. Вообичаено, и должината на отсечката SM се вика **полупречник** или **радиус на кружницата**.

Со помош на дефиницијата за кружница ќе ја најдеме нејзината равенка во однос на избрана координатна рамнина xOy (цртеж 1).

Ако $M(x, y)$ е произволна точка од кружницата со центар во точката $S(x_0, y_0)$, тогаш $\overline{SM} = r$. Според формулата за растојание меѓу две точки имаме

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Добиената равенка може да ја запишеме во облик

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

која претставува **нормална равенка на кружница** со центар во точка $S(x_0, y_0)$ и радиус r .

Специјално, ако центарот на кружницата е во координатниот почеток, тогаш равенката добива облик

$$x^2 + y^2 = r^2$$

и се нарекува **централна равенка на кружница**.

Задача 1. Најди ја равенката на кружницата со центар во точката $S(5, 4)$ и радиус $r = 8$.

Решение. Бараната равенка гласи $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 64$. ♦

Ако равенката на кружница ја запишеме во развиен облик, ја добиваме равенката

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0,$$

каде што $l = -2x_0$, $m = -2y_0$ и $n = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, што претставува равенка од втор степен.

Се поставува прашањето кога равенка од втор степен од облик

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

е равенка на кружница? Заради $l^2 + m^2 - 4n = 4x_0^2 + 4y_0^2 - 4n = 4r^2$, заклучуваме дека:

- Ако $l^2 + m^2 - 4n > 0$, тогаш $4r^2 > 0$, односно $r > 0$, од каде што следува дека дадената равенка е равенка на кружница со центар $S\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ и радиус r ;
- Ако $l^2 + m^2 - 4n = 0$, тогаш $4r^2 = 0$, односно $r = 0$, од каде што следува дека дадената равенка е равенка на точка $S\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$;
- Ако $l^2 + m^2 - 4n < 0$, тогаш $4r^2 < 0$, што не е можно. Во тој случај во рамнината не постојат точки чии координати ја задоволуваат дадената равенка.

Задача 2. Докажи дека равенката $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$ е равенка на кружница, а потоа најди ги центарот и радиусот.

Решение. I начин: Во дадената равенка $l = -6$, $m = 10$ и $n = 18$. Од неравенството

$$l^2 + m^2 - 4n = (-6)^2 + 10^2 - 4 \cdot 18 = 64 > 0$$

следува дека дадената равенка е равенка на кружница. Од $l = -2x_0$, $m = -2y_0$ и $n = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, добиваме дека $x_0 = 3$, $y_0 = -5$ и $r = 4$, односно дадената равенка е равенка на кружница со центар во точката $S(-3, 5)$ и радиус $r = 4$.

II начин: Дадената равенка ја трансформираме на тој начин што изразите $x^2 - 6x$ и $y^2 + 10y$ ги дополнуваме до полн квадрат. Тогаш дадената равенка го добива обликот $(x-3)^2 + (y+5)^2 - 9 - 25 + 18 = 0$, односно

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$$

од каде што заклучуваме дека центар на дадената кружница е точката $S(3, -5)$, а нејзиниот радиус е $r = 4$. ♦

Задача 3. Најди ја равенката на кружницата која минува низ точките $A(2, -2)$, $B(7, 3)$ и $C(6, 0)$.

Решение. Ако координатите на секоја од точките ги замениме во равенката $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$, го добиваме системот

$$\begin{cases} 2l - 2m + n = -8 \\ 7l + 3m + n = -58 \\ 6l + n = -36 \end{cases}$$

чие што решение е $l = -4$, $m = -6$ и $n = -12$. Бараната равенка на кружницата гласи $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, односно

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25. \blacklozenge$$

Задачи

1. Најди ја равенката на кружницата со центар во точката $S(0,0)$ и радиус $r = 5$.

2. Запиши ги координатите на центарот и радиусот на кружницата зададена со равенката:

а) $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0$ **б)** $x^2 + y^2 + 12x - 16y + 64 = 0$

в) $x^2 + y^2 - 70x - 24y = 0$ **г)** $x^2 + y^2 + 60x + 60y = -900$.

3. Најди ја равенката на кружницата чиј центар е во точката $S(-3,-2)$ и минува низ координатниот почеток.

4. Најди ја равенката на кружницата која е концентрична со кружницата $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$ и минува низ точката $A(-3,4)$.

5. Запиши ја равенката на кружницата која минува низ точките:

а) $A(7,1)$, $B(5,5)$, $C(-2,4)$ б) $A(0,1)$, $B(2,0)$, $C(3,-1)$.

4.13. Заемна положба на права и кружница

Нека се дадени кружница со својата равенка $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ и права со својата општа равенка $Ax + By + C = 0$. Дадената права ја сече кружницата во две точки, во една точка или нема заеднички точки со кружницата во зависност од тоа дали системот

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

има две, едно или ни едно решение. Тогаш велиме дека правата ја сече кружницата, ја допира кружницата или правата не ја сече кружницата, соодветно.

Од елементарна геометрија ни е познато дека: правата ја сече кружницата, ако растојанието од центарот на кружницата до правата е помало од радиусот на кружницата; ја допира кружницата ако растојанието од центарот на кружницата до правата е еднакво на радиусот на кружницата; и правата не ја сече кружницата, ако растојанието од центарот на кружницата до правата е поголемо од радиусот на кружницата. Користејќи ја формулата за растојание од точка до права, добиваме дека:

- Правата ја сече кружницата во две точки, ако $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} < r$,
- Правата ја допира кружницата, ако $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r$,
- Правата не ја сече кружницата, ако $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} > r$.

Задача 1. Најди ги пресечните точки на кружницата $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ со правата $x + y - 5 = 0$.

Решение. Од условот $\frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} < 2$ следува дека правата ја сече кружницата. Координатите на пресечните точки ги задоволуваат двете дадени равенки како равенката на правата така равенката на кружницата. Според тоа, тие се решенија на системот

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Заменувајќи $y = 5 - x$ во првата равенка ја добиваме равенката $x^2 - 4x + 3 = 0$ чии корени се $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Тогаш, за y од втората равенка, добиваме $y_1 = 4$ и $y_2 = 2$. Според тоа, дадената права ја сече кружницата во точките $(1, 4)$ и $(3, 2)$. ♦

Задачи

1. Најди ги заедничките точки на правата $x - y - 4 = 0$ со кружницата $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

2. Најди ја должината на тетивата која ја отсекува правата $3x + y + 2 = 0$ од кружницата $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако $A(-5, 5)$, $B(7, -3)$ и $C(3, 1)$.

2. Најди ги координатите на точката M која што ја дели отсечката AB во однос λ , ако:

а) $A(10, 3)$, $B(-2, -5)$ и $\lambda = \frac{1}{3}$

б) $A(-2, -5)$, $B(13, 5)$ и $\lambda = \frac{3}{2}$.

3. Точките $A(1,1)$, $B(-1,3)$ и $C(2,0)$ лежат на една права. Да се определи односот λ во кој точката A ја дели отсечката CB .

4. Равенките на правите на кои што лежат отсечките AB , BC и CA се $2x + 3y - 5 = 0$, $3x + 2y = 0$ и $4x + y - 5 = 0$, соодветно. Точката M ја дели отсечката BC во однос $\lambda = 2$. Најди ја равенката на правата AM .

5. Најди ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-7,2)$ и $M_2(3,-5)$.

6. Докажи дека точките $A(1,9)$, $B(-2,3)$ и $C(-5,-3)$ лежат на една права.

7. Дадени се точките $A(-2,-1)$, $B(1,2)$ и $C(-1,4)$. Запиши ги координатите на точката D , ако $ABCD$ е паралелограм.

8. Дадени се точките $A(3,3)$, $B(-2,3)$ и $C(-1,0)$. Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

9. Најди го растојанието d од точката $M(2,3)$ до правата:

а) $3x + 4y - 25 = 0$

б) $12x - 5y + 4 = 0$.

10. Запиши ги равенките на медијаните на триаголникот ABC , ако $A(3,2)$, $B(5,4)$ и $C(1,4)$.

11. Даден е триаголник ABC . Запиши ги координатите на тежиштето T на триаголникот, ако $A(-8,1)$, $B(1,2)$ и $C(-5,-3)$.

12. Дадени се точките $A(-2,-2)$, $B(7,1)$ и $C(3,3)$. Најди:

а) ја должината на отсечката AB ,

б) го растојанието на точката C од правата AB ,

в) ја плоштината на триаголникот ABC .

13. Пресметај ја плоштината на даден квадрат, ако две негови страни лежат на правите $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$.

14. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,8)$ и со координатните оски заградува триаголник со плошина $P = 6$.

15. Основата на рамнокрак триаголник лежи на правата $x - 2y + 3 = 0$, една негова страна лежи на правата $4x + y + 5 = 0$, а другата страна минува низ точката $P\left(\frac{6}{5}, \frac{28}{5}\right)$.

а) Запиши ги координатите на тежиштето на дадениот триаголник.

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот.

16. Страните AB , BC , CD и DA на четираголникот $ABCD$ се дадени со равенките $5x + y + 13 = 0$, $2x - 7y - 17 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$ и $3x - 4y + 17 = 0$, соодветно. Најди ги равенките на правите на кои лежат дијагоналите на дадениот четираголник.

17. Запиши ја равенката на кружницата чиј дијаметар е отсечокот на правата $3x - 4y + 12 = 0$ меѓу координатните оски.

18. Запиши ја равенката на кружницата која минува низ точките $A(2, 3)$ и $B(-4, -1)$, додека центарот лежи на правата $x - y - 2 = 0$.

5. КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

Во оваа тема ќе разгледаме начини на кои може од множество со конечен број елементи да направиме избор на сите групи елементи според одредени услови и како да го одредиме бројот на сите такви формирани групи елементи.

5.1. Пермутации

Дефиниција. Нека е дадено множество A со конечен број елементи. Секој различен распоред на сите елементи од множество A нарекува **пермутација**.

Може да се случи во некој распоред елементите да се повторуваат, па затоа постојат пермутации без и со повторување.

Пермутации без повторување

Пред да го одредиме начинот на кој ќе го пресметуваме бројот на пермутации на некое дадено множество ќе воведеме некои ознаки и ќе разгледаме конкретен пример.

Нека множеството A има n елементи. Бројот на пермутации без повторување на елементите на множеството A ќе го означиме со $P(n)$.

Пример 1. Одреди го бројот на пермутации без повторување на множеството A ако:

а) $A = \{1, 2\}$ б) $A = \{1, 2, 3\}$ в) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Решение. а) Можни се два различни распореди на овие два елементи т.е. 12, 21. Значи $P(2) = 2$,

б) Можни се шест различни распореди на елементите т.е. 123, 132, 213, 231, 312 и 321, па $P(3) = 6$,

Ако ја избереме прво цифрата 1, таа може да се најде на три различни места во трицифрениот број. При фиксен избор на цифрата 1, цифрата 2 може да ја поставиме на две различни места. При фиксен избор на двете цифри, последната цифра може да се избере само на еден начин. Значи бројот на начини на кои може да се изберат цифрите е $3 \cdot 2 \cdot 1$.

в) Можни се 24 различни распореди на елементите т.е.

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,

2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,

4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

Значи $P(4) = 24$.

Да го разгледаме начинот на кој се образувани пермутациите. Слично, како во б), цифрата 1 може да ја позиционираме на четири различни места во четирицифрениот број. Ако 1 е фиксирана, тогаш цифрата 2 може да ја поставиме на три различни позиции. При фиксна позиција на 1 и 2, цифрата 3 може да ја поставиме на две различни места. Конечно при фиксна позиција на цифрите 1, 2 и 3, цифрата 4, може да се избере само на еден начин. Според тоа бројот на сите распореди е $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Воопшто, за множество со n елементи, првиот елемент може да го распоредиме на n места, вториот на $n-1$ место итн, последниот елемент на 1 место. Значи бројот на различни распореди (пермутации) на n елементи ќе го пресметаме со помош на производот $n(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$.

Бројот $n(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$ се вика n **факториел** и се означува со $n!$.

Земаме по дефиниција дека $0!=1$.

Според претходното, бројот на **пермутации без повторување** на множество со n елементи е $P(n)=n!$.

Пример 2. Одреди го бројот на различни петцифрени броеви кои може да се формираат од цифрите 0, 1, 2, 3, 4.

Решение. Од 5 цифри може да бидат формирани $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ петцифрени броеви. Од тој број треба да го извадиме бројот на пермутации кај кои првата цифра е 0, односно $P(4)=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$. Значи, бројот на петцифрените броеви составени од дадените пет цифри е

$$P(5)-P(4)=5!-4!=120-24=96. \blacklozenge$$

Пермутации со повторување

Пред да ја изведеме формулата со која ќе го одредиме бројот на пермутации со повторување, да го разгледаме следниот пример.

Пример 2. Одреди го бројот на сите петцифрени броеви кои може да се образуваат од цифрите 1, 2, 3, така што во секој број цифрата 1 се појавува три пати, а останатите цифри се појавуваат само по еднаш.

Решение. Да ги запишеме сите такви петцифрени броеви:

11123, 11132, 11213, 11231, 11312, 11321, 12311, 12131, 12113,

13211, 13121, 13112, 21113, 21131, 21311, 23111, 31112, 31121, 31211, 32111.

Добивме вкупно 20 различни петцифрени броеви со бараното својство.

Бројот на сите петцифрени броеви запишани со различни цифри изнесува $P(5)=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$. Во овој случај, бидејќи цифрата 1 се јавува три пати во секој петцифрен број, тоа значи дека во тие 120 броеви ќе има такви кои се еднакви. Еднаквите броеви се добиваат за сите пермутации на бројот 1 на трите исти места што е $P(3)=3!$. Бројот на сите различни петцифрени броеви со бараното својство ќе го добиеме како количник $\frac{5!}{3!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=20$.

Бројот на пермутации на n елементи, од кои еден елемент се повторува k пати ($k \leq n$), а сите други точно по еднаш, се одредува со формулата $P_k(n)=\frac{n!}{k!}$.

Овие пермутации се викаат **пермутации со повторување**.

Во општ случај, бројот на сите **пермутации на n елементи со повторување** во кои еден елемент се појавува k_1 пати, втор k_2 пати,....., m -ти елемент се појавува k_m пати, се означува со $P_{k_1, k_2, \dots, k_m}(n)$. Забележуваме дека при такви пермутации $k_1+k_2+\dots+k_m \leq n$, а бројот на сите пермутации се пресметува со $P_{k_1, k_2, \dots, k_m}(n)=\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\dots k_m!}$.

Пример 3. Колку петцифрени броеви можат да се формираат од цифрите 1 и 2 но такви што во нив цифрата 1 се појавува 3 пати, а цифрата 2 се појавува 2 пати ?

Решение. Да ги запишеме сите такви петцифрени броеви: 11122, 11212, 12112, 21112, 11221, 12121, 21121, 12211, 21211, 22111 т.е. бараниот број е $P_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$.

Задача 1. Колкав е бројот на сите седумцифрени броеви формирани од цифрите 1, 2, 3 и 4, во кои цифрата 1 се појавува два пати, цифрата 2 се појавува три пати, а цифрите 3 и 4 се појавуваат по еднаш?

Решение. Бараниот број е $P_{2,3}(7) = \frac{7!}{2!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 420$. ♦

Задача 2. Колку осумцифрени броеви можат да се формираат од цифрите 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5.

Решение. $P_{2,3,3}(8) = \frac{8!}{2!3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$. ♦

Задачи

1. На колку различни начини можат да се подредат 5 различни книги на една полица во библиотеката?

2. Најди на колку различни начини можат да седнат 6 ученици на една клупа.

3. Колку шестцифрени броеви можат да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, кои започнуваат со 4?

4. Колку е збирот на сите броеви во чиј запис се јавува секоја од цифрите 2, 3 и 4 точно по еднаш?

5.2. Варијации

Варијации без повторување

Пред да преминеме на разгледување на поимот варијација, ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. На шаховска олимпијада треба да се формираат тимови од 3 члена, така што еден да игра на првата табла, друг на втората и трет на третата табла. Колку различни тричлени тимови можат да се формираат од екипа со 6 шахисти?

Решение. Нека играчите ги означиме со 1, 2, 3, 4, 5, и 6. Изборот на првиот член од тимот може да се направи на 6 начини. Нека за прв член е избран играчот 2. Тогаш вториот член можеме да го избереме од играчите 1, 3, 4, 5, и 6, односно тоа можеме да го направиме на 5 начини. Значи изборот на првите два играча може да се направи на $6 \cdot 5 = 30$ начини. Ако за првите два играча сме ги избрале 2 и 4, тогаш за третиот играч имаме можност да избереме еден од 1,

3, 5, и 6, односно тоа можеме да го направиме на 4 начини. Значи, тим од три члена од 6 шахисти можеме да направиме на $30 \cdot 4 = 120$ начини. ♦

Со решавањето на оваа задача воочивме дека од 6 различни елементи можеме да формираме $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ различни подредени тројки од играчи.

Дефиниција. Нека A е множество со n елементи. Секоја подредена k -торка од различни елементи на множеството A , за $k \leq n$, се вика **варијација без повторување на n елементи од класа k** .

Забележуваме дека варијација од n -та класа од n елементи е истовремено пермутација на тоа n -елементно множество.

Две варијации се различни ако имаат барем по еден различен елемент, или ако имаат еднакви елементи, но подредени по различен редослед.

Бројот на варијации од k -та класа од n елементи го означуваме со V_n^k .

Задача 1. Колку четирицифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 и притоа ни една од цифрите да не се повторува?

Решение. Првата цифра на четирицифрениот број може да се избере на 7 начини, втората на 6, третата на 5 и четвртата на 4 различни начини. Според тоа, бројот на бараните четирицифрени броеви е $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. ♦

Имајќи предвид дека првиот член во една k -торка може да го избереме на n начини, вториот на $n-1$ начини итн. k -от член го избираме на $n-(k-1)$ начини, па бројот на варијации од k -та класа од n елементи е

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)).$$

Од

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!, \end{aligned}$$

$$\text{следува дека } V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Според тоа $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ е **бројот на варијации од k -та класа од n елементи**.

Задача 2. На колку начини може да бидат распоредени 9 наставни предмети, ако во денот ученикот треба да има настава од 5 различни предмети.

Решение. Бројот на различни распореди на 9-те наставни предмети по 5 на ден, всушност, е бројот на варијации од 5-та класа од 9 елементи. Според тоа, $V_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120$. ♦

Варијации со повторување

Дефиниција. Варијација со повторување од k -та класа од n елементи на некое множество A е секоја подредена k -торка од елементи од тоа множеството.

Пример 2. Колку двоцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 3, 5?

Решение. Забележуваме дека во оваа задача не се бара секоја цифра да се појавува само еднаш. Според тоа бараните двоцифрени броеви се: 11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55. Нив ги има $9 = 3^2$. ♦

За да го одредиме бројот на варијации со повторување од класа k на n елементи, прво да го разгледаме бројот на сите варијации на множеството од n елементи од класа $k=1$. Тој број е n т.е. еднаков е со бројот на елементи на разгледуваното множество. Сите варијации од класа $k=2$ ќе се добијат кога на секоја варијација од претходната класа ќе се додаде секој елемент од множеството. На тој начин се добиваат $n \cdot n = n^2$ варијации. Слично, бројот на варијации од класа k ќе се добие кога на секоја варијација од класа $k-1$ ќе се додаде секој елемент од множеството. Според тоа, **бројот на сите варијации со повторување од k -та класа од n елементи** се означува со $\overline{V}_n^k$ и се одредува со формулата $\overline{V}_n^k = n^k$.

Задача 3. Кој е бројот на варијации со повторување од 4-та класа од елементите a, b, c, d, e ?

Решение. $\overline{V}_5^4 = 5^4 = 625$. ♦

Задача 4. Колку петцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 3, 5?

Решение. Може да се формираат $\overline{V}_3^5 = 3^5 = 243$ такви петцифрени броеви.

♦

Задачи

1. Миле знаел дека телефонскиот број на неговиот пријател е составен од шест различни цифри и ги памтел првите три. Колку бројки треба да избира на телефонот за да го погоди бројот на неговиот пријател?

2. Колку четирицифрени броеви, со различни цифри, можат да се напишат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5?

3. Одреди ја вредноста на V_8^3 и $\overline{V}_8^5$.

4. Одреди ја вредноста на m , ако $V_m^2 = 42$.

5. Најди го n , ако $10 \cdot V_n^2 = V_{n+1}^4$.

5.3. Комбинации

Комбинации без повторување

Пред да преминеме на разгледување на следниот начин на избор на елементите од дадено множество, да ја разгледаме следната задача.

Пример 1. На натпреварот по математика учествуваат екипи кои имаат по три ученици од училиште. На колку различни начини може да се формира екипа од едно училиште, ако изборот на екипата се прави од вкупно 6 ученици?

Решение. Забележуваме дека во оваа задача не е битен редоследот на членовите на екипата. Да ги означиме учениците со 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Бројот на сите подредени тројки е $V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Нас не интересираат само тројки, односно подмножества со три елементи, а не и подредени тројки. Затоа, разгледуваме колку различни подредени тројки може да се формираат од множество од три ученици. Такви има колку што има пермутации на 3 елементи, односно $P_3 = 6$. Според ова, бројот на екипите од три ученици, формирани од 6 ученици, без да се зема предвид подреденоста на учениците во екипата ќе биде $120 : 6 = 20$. Значи, може да се формираат 20 различни екипи. ♦

Дефиниција. Нека A е конечно множество од n елементи и $k \leq n$. Секој избор на k различни елементи од множеството A се нарекува **комбинација без повторување од k -та класа од n елементи**.

Бројот на сите комбинации од k -та класа од n елементи го означуваме со C_n^k .

Всушност изборот на сите подмножества од n елементи за кои е битен и редоследот на елементите дава варијација од k -такласа од n елементи т.е.

$C_n^k \cdot k! = V_n^k$, па со средување на количникот $C_n^k = \frac{V_n^k}{k!}$ се добива:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Според тоа, бројот на сите комбинации од k -та класа од n елементи е:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Често, C_n^k се означува и со следнава ознака $\binom{n}{k}$ која се чита: „ n над k “ и се

вика **биномен коефициент**. Значи $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Задача 1. Најди го бројот на комбинациите без повторување од прва до петта класа од елементите a, b, c, d, e .

Решение. $C_5^1 = \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5$, $C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, $C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$,
 $C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$, $C_5^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$. ♦

Со едноставни проверки се докажуваат следниве својства:

$$\begin{aligned} \text{а) } \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} & \text{б) } \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 & \text{в) } \binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \\ \text{г) } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Задача 2. Одреди ја вредноста на C_{50}^{48} .

Решение. $C_{50}^{48} = \binom{50}{48} = \binom{50}{50-48} = \binom{50}{2} = \frac{50 \cdot 49}{2 \cdot 1} = 25 \cdot 49. \blacklozenge$

Задача 3. Колку прави формираат 8 точки, такви што кои било три од нив не лежат на иста права?

Решение. Знаеме дека една права е определена со две точки и правата AB е иста со правата BA . Значи, имаме комбинации од 8 елементи од 2 класа, односно $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ прави. $\blacklozenge$

Комбинации со повторување

Нека се дадени елементите a, b, c . Од нив може да се направат 3 комбинации од втора класа, односно множеството $\{a, b, c\}$ има три подмножества кои имаат по точно два елемента. Тоа се комбинациите ab, ac и bc , во кои не е битно подредувањето на елементите. Да видиме колку комбинации од по два елемента може да се направат ако дозволиме повторување на елементите. Да ги напишеме сите такви комбинации: aa, ab, ac, bb, bc и cc . Гледаме дека нив ги има шест. $\blacklozenge$

Дефиниција. Нека A е конечно множество со n елементи и нека k е природен број. Секој избор на k елементи од A , при што некои елементи може да бидат избрани и повеќе пати и редоследот на избирањето не е битен, се нарекува **комбинација со повторување од k -та класа од n** .

Бројот на сите комбинации со повторување од k -та класа се означува со $\overline{C}_n^k$.

Пример 2. Да го одредиме бројот $\overline{C}_3^4$.

Решение. Избираме три елементи, a, b, c . Да ги напишеме сите комбинации со повторување од 4-та класа за овие елементи:

$aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc, bbbb, bbbc, bbcc, bccc, cccc$.

Според тоа, $\overline{C}_3^4 = 15. \blacklozenge$

За бројот на комбинации со повторување од класа k од n елементи имаме:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Притоа, бројот на елементи во класата k може да биде и поголем од n т.е. $k > n$.

Задача 4. Одреди го бројот на комбинации со повторување од прва до четврта класа, за елементите a, b, c, d, e, f .

$$\begin{aligned}\overline{C}_6^1 &= \binom{6+1-1}{1} = \binom{6}{1} = 6, & \overline{C}_6^2 &= \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21, \\ \overline{C}_6^3 &= \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56, & \overline{C}_6^4 &= \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.\end{aligned}$$

♦

Задачи

1. Колку различни триаголници можат да се формираат од шесте темиња од еден шестаголник?
2. Одреди го бројот n , ако $C_n^{n-2} = 10$.
3. Колку дијагонали има еден осумаголник?
4. Одреди го бројот n , ако $4C_n^2 = C_{n+2}^3$.
5. Колку најмалку елементи се потребни за да се направат 276 комбинации со повторување од втора класа.

5.4. Биномна формула

Да го разгледаме производот на биномите:

$$(x+a) \cdot (x+a) = (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) = (x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) = (x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

Коефициентите: 1, 4, 6, 4, 1 од последното равенство се еднакви на бројот на комбинации од 0, 1, 2, 3 и 4 класа од 4 елементи соодветно, односно може да ги запишеме како:

$$C_4^0 = \binom{4}{0} = 1, \quad C_4^1 = \binom{4}{1} = 4, \quad C_4^2 = \binom{4}{2} = 6, \quad C_4^3 = \binom{4}{3} = 4, \quad C_4^4 = \binom{4}{4} = 1.$$

Значи тоа равенство можеме да го запишеме и во следниов облик:

$$\begin{aligned}(x+a)^4 &= x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 = \\ &= \binom{4}{0}x^4a^0 + \binom{4}{1}x^3a^1 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}xa^3 + \binom{4}{4}x^0a^4\end{aligned}$$

Слично, со множење на 6 биноми доаѓаме до заклучок дека:

$$\begin{aligned}(x+a)^6 &= x^6a^0 + \binom{6}{1}x^5a^1 + \binom{6}{2}x^4a^2 + \binom{6}{3}x^3a^3 + \binom{6}{4}x^2a^4 + \binom{6}{5}xa^5 + \binom{6}{6}x^0a^6 = \\ &= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6. \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

Во претходните формули како коефициенти се појавија броевите кои претходно ги нарековме и биномни коефициенти. Нивното име е изведено токму од фактот дека тие се коефициенти во развојот на секој бином на

некој степен.

Се докажува дека за секој природен број n , точно е следново равенство:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}a^k + \dots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n.$$

Добиената формула се вика **биномна формула** и овозможува на едноставен начин да се запише во облик на полином степенот на произволен бином од облик $(x+a)^n$.

Пример 1.

$$\begin{aligned}(x-a)^5 &= (x+(-a))^5 = x^5 - \binom{5}{1}x^4a + \binom{5}{2}x^3a^2 - \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}xa^4 - \binom{5}{5}a^5 = \\ &= x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5. \blacklozenge\end{aligned}$$

Слично се добива и биномната формула за биномот $(x-a)$. Имено, ако наместо a ставиме $(-a)$, членовите кои содржат a ќе имаат негативен знак, ако a е на непарен степен показател, а позитивен, ако a е на парен степен показател, односно:

$$(x-a)^n = x^n - nx^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 - \dots + (-1)^k \binom{n}{k}x^{n-k}a^k \pm \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + (-1)^n a^n$$

Пример 2. Најди го третиот член во развојот на степенот $(y+2)^7$.

Решение. За $x=y$, $a=2$ и $n=7$ од биномната формула добиваме

$$\binom{7}{2}y^{7-2} \cdot 2^2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}y^5 \cdot 4 = 84y^5. \blacklozenge$$

Биномните коефициенти можат да се претстават нагледно во еден триаголник наречен **Паскалов триаголник**. Во него, секој број, освен единиците, е збир на броевите кои се непосредно над него лево и десно. Тоа е, всушност, Паскаловото правило.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Ако во биномната формула, ставиме $x=a=1$ добиваме:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Бидејќи бројот на комбинации од класа k од n елементи е бројот на сите k -елементни подмножества од n -елементно множество, според претходното равенство, заклучуваме дека множество со n елементи има 2^n подмножества.

Задачи

Запиши ги со помош на биномната формула, следниве степени:

$$1. (3+2x)^5. \quad 2. (a+b-c)^3. \quad 3. (1-2y)^6.$$

$$4. (3x+1)^5. \quad 5. (\sqrt{x}+\sqrt{y})^4. \quad 6. (\sqrt[3]{x}-1)^4.$$

$$7. \text{Одреди го петтиот член од развиениот вид на степенот } \left(x-\frac{y}{3}\right)^7.$$

5.5. Класична веројатност

Теоријата на веројатноста е релативно млада гранка на математиката која настанала со разгледување на задачите во врска со игрите на среќа. Иако настанала во рамките на математиката, теоријата на веројатност ја добила својата вистинска афирмација во рамките на статистиката во истражувањето на различни појави и нивните односи чие настанување, постоење и односи не се однапред точно одредени и непроменливи во времето и просторот.

Во теоријата на веројатноста и, особено, во нејзината примена поимите **експеримент** и **настан** се основни поими. За да појасниме што подразбираме под овие термини, ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Ако фрлиме една монета во воздух, по нејзиното паѓање на некоја рамнина, на горната страна ќе се појави или „грб“ или „писмо“. Со фрлање на монетата и нејзиното паѓање на рамнина сме извршиле еден „експеримент“ чиј резултат може да биде еден од исходите:

- а) на горната страна од монетата се појавил „грб“,
- б) на горната страна од монетата се појавило „писмо“. ♦

Пример 2. Да разгледаме еден „експеримент“ кој се состои во фрлање две коцки за играње на рамнина (маса). Како можеме да го опишеме резултатот од овој експеримент? Еден од начините би бил ако коцките ги нумерираме така што едната ќе ја сметаме за прва (или обоена, на пример во црвена боја), а другата за втора (обоена сина). Го запишуваме бројот на точките кои се појавуваат на горната страна на секоја од нив. Во таа смисла, секој исход, односно резултат може да се претстави како подреден пар (x, y) , каде x е бројот на точките што се појавиле на првата, а y бројот на точките на втората коцка.

Така сите можни исходи на овој експеримент може да се опишат со множеството:

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}. \diamond$$

Значи при проучувањето на различни појави може да се набљудува реализација на одредено множество услови (фрлање монета, коцка итн.). Под **експеримент** ќе подразбираме една реализација на одредено множество услови.

Кога се можни повеќе од еден резултат и не можеме да определиме однапред кој од овие резултати ќе се реализира, експериментот го нарекуваме **недетерминиран** или **случаен**.

Предмет на изучувањето на теоријата на веројатностите се експериментите кои ги задоволуваат следниве услови:

- можност (реална или апстрактна) за неограничен број повторувања при исти услови;
- однапред да е познато множеството од можни резултати (исходи) при спроведување на експериментот;
- при секој експеримент може да се реализира еден и само еден од можните резултати.

Но, постојат и експерименти чија реализација или резултат се добива според точно определени закони и може точно да се предвиди. Експериментите од ваков тип се викаат **детерминирани**.

Пример 3. Примери на детерминиран експеримент се Њутновиот закон на механиката, како и Њутновиот закон за општата гравитација. ♦

Врз основа на овие експерименти може да се објаснува она што се случувало порано и да се предвидува што ќе се случи во иднина.

Пример 4. Можно е да се предвиди кога во иднина ќе се случи затемнувањето на Месечината или Сонцето, како и со пресметување да се утврди кога во минатото имало такви затемнувања. ♦

На секој случаен експеримент можеме да му придружime множество Ω од сите можни исходи од тој експеримент. Тоа множество Ω се вика **множество на елементарни настани** или **простор** на елементарни настани, а секој негов елемент се вика **елементарен настан**. Секое подмножество A од множеството Ω се нарекува **случаен настан** или само **настан**. Значи, множеството Ω е сигурен настан, бидејќи при изведување на експериментот секогаш ќе се случи некој од елементарните настани. Празното множество е подмножество на Ω , но никогаш не може да се случи, според тоа, ова претставува **невозможен настан**. Секое непразно подмножество на Ω претставувавозможен настан. Ќе разгледаме неколку примери експерименти, соодветен простор од елементарни настани и случајни настани.

Пример 5. При експериментот фрлање монета во воздух множеството елементарни настани е $\Omega = \{\text{П}, \text{Г}\}$, каде со П е означен настанот: на горната страна на монетата се појави писмо, а Г го означува настанот: на горната страна на монетата се појави грб. ♦

Пример 6. Експериментот се состои од фрлање монета во воздух два пати. Да ги разгледаме настаните:

А: при двете фрлања паднало писмо,

Б: при двете фрлања паднал грб,

В: при првото фрлање паднало писмо, а при второто грб,

Г: при првото фрлање паднал грб, а при второто писмо.

Множеството елементарни настани за овој експеримент е множеството:

$\Omega = \{\text{ПП}, \text{ГГ}, \text{ПГ}, \text{ГП}\}$.

Настанот A означува дека при првото и при второто фрлање паднало писмо, односно еднозначно го одредува резултатот во првото и второто фрлање. Тоа се случува и со елементарниот настан B кој еднозначно го одредува резултатот и во првото и во второто фрлање.

Со ваквото запишување на множеството Ω од елементарни настани еднозначно се одредени резултатите и во првото и во второто фрлање.

Настанот $F = \{ПП, ГГ\}$ го определува случајниот настан, дека при двете фрлања паднала иста страна на монетата. Настанот $G = \{ПГ, ГП\}$, пак, го определува случајниот настан дека при двете фрлања паднала различна страна на монетата. ♦

Пример 7. Коцка чии страни се означени со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 се фрла два пати. Множеството од елементарни настани Ω се состои од следните 36 исходи:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Да забележиме дека, запишаните исходи се варијации од 2 класа, со повторување од елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6. ♦

Пример 8. Нека ни е дадена кутија во која има $n = 12$ топчиња, од кои 8 се бели, а 4 црни. Да претпоставиме дека сите топчиња се еднакви и сакаме да извлечеме бело топче. Ако извлечеме бело топче, тоа е **поволен настан**, а ако извлечеме црно топче, тогаш тоа е **неповолен настан**. ♦

Ќе сметаме дека сите елементарни настани при даден експеримент се еднакво можни.

Дефиниција. Веројатноста за појавување на настанот A е количникот од бројот на поволни елементарни настани и сите можни елементарни настани од множеството елементарни настани за тој експеримент.

Според тоа, ако веројатноста за појавување на настанот A ја означиме со $P(A)$, бројот на поволни елементарни настани со m и бројот на сите можни елементарни настани со n се добива:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Лесно се забележува дека, $P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, каде A е настанот извлечено е бело топче од примерот 8.

Пример 9. Колкава е веројатноста при фрлање коцка за играње, на горната страна на коцката да се појават пет точки?

Решение. Во овој експеримент бројот на сите елементарни настани е $n = 6$ а само еден е поволен т.е. $m = 1$. Ако со A го означиме настанот на горната страна на коцката се појавија пет точки, тогаш $P(A) = \frac{1}{6}$. ♦

Пример 10. Во игра на среќа има 500 купони, од кои само 30 носат награда. Колкава е веројатноста да се добие награден купон?

Решение. Сите можни настани се $n = 500$, од нив $m = 30$ се поволни настани. Според тоа, веројатноста на настанот A : се доби награден купон е $P(A) = \frac{30}{500} = 0,06$. ♦

Од разгледаните примери може да воочиме дека ако A е настан во врска со даден експеримент, а Ω е множеството од елементарни настани, секогаш важи $0 \leq P(A) \leq 1$.

Притоа:

- $P(\emptyset) = 0$, бидејќи настанот $\emptyset$ е невозможен,
- $P(\Omega) = 1$, бидејќи Ω е сигурен настан,

Задача 1. Во една продавница 6 % од 50 чаши имале мал дефект. Колкава е веројатноста ако се купат 6 чаши ни една од нив да не е со дефект? Дали може сите 6 купени чаши да се со дефект?

Решение. Купувањето на 6 чаши од 50 е комбинација од 6 класа од 50 елементи. Според тоа, бројот на сите можни начини да се изберат 6 чаши од 50 различни чаши е

$$n = C_{50}^6 = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{6!}.$$

Бидејќи 6 % чаши се со дефект, тоа значи дека од 50 чаши 47 се без дефект. Тогаш бројот m на поволни појавувања на настанот A , односно избраните чаши да се без дефект е еднаков на бројот на комбинации од 6 класа од 47 елементи, односно

$$m = C_{47}^6 = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{6!}.$$

Оттука следува дека веројатноста да се купат 6 чаши без дефект е:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45} \approx 0,676.$$

Бидејќи само три чаши се со дефект, купувањето на 6 чаши со дефект е невозможен настан, односно неговата веројатност е 0. ♦

Задачи

1. Во едно училиште имало 400 ученици. Од нив биле 48 одлични по сите предмети, а 160 одлични, но не по сите предмети. Колкава е веројатноста првиот ученик што ќе се сретне е:

- А: одличен по сите предмети,
- Б: одличен, но не по сите предмети.

2. Најди колкава е веројатноста при фрлање на две монети и на двете да биде грб.

3. Колкава е веројатноста при фрлање на две коцки и на двете да биде 6?

4. Колкава е веројатноста при фрлање на две коцки и на двете да има ист број?

5. Од група од 30 ученици, меѓу кои 20 се момчиња и 10 девојчиња, случајно се избира група од 5 ученици. Колкава е веројатноста да се исполни настанот A : избрани се 5 момчиња?

6. Од зборот „математика“ се избира случајно една буква. Најди колкава е веројатноста избраната буква да биде:

а) буквата „А“,

б) буквата „Т“,

в) самогласка.

5.6. Условна веројатност

Нека се дадени два настани A и B . Ќе разгледаме неколку операции со настаните:

Дефиниција. Производ на настаните A и B е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настани A и B .

Тоа е настанот кој ги содржи сите елементарни настани кои припаѓаат на пресекот на множествата елементарни настани на A и B . Производ на настаните A и B се означува со AB .

Два настани се **дисјунктни** ако не може да се појават истовремено. Значи нивниот производ е невозможен настан т.е. $AB = \emptyset$ и $P(AB) = 0$.

Дефиниција. Збир на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A или B .

Тоа е настанот кој ги содржи сите елементарни настани кои припаѓаат на унијата на множествата елементарни настани на A и B . Збирот на настаните A и B се означува со $A+B$.

Веројатноста на збирот се пресметува со формулата

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Пример 1. Нека експериментот е фрлање коцка. Да ги разгледаме настаните:

A : на горната страна на коцката се појавија барем три точки

B : на горната страна на коцката се појави парен број точки

Да го одредиме производот и збирот на настаните A и B .

Решение. Множеството елементарни настани е $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, настанот $A = \{3, 4, 5, 6\}$ и настанот $B = \{2, 4, 6\}$. Тогаш $AB = \{4, 6\}$, а

$A + B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Значи A и B не се дисјунктни настани, па $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$, што е еквивалентно со вредноста која се добив ако директно пресметаме $P(A + B) = \frac{5}{6}$.

Дефиниција. Спротивен настан на настанот A е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот A .

Тој настан е комплемент на множеството елементарни настани на настанот A во однос на множеството елементарни настани Ω и се означува со $\bar{A}$. Притоа $A\bar{A} = \emptyset$, $A + \bar{A} = \Omega$ и $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Да разгледаме ситуација кога настанот A се појавил после појавување на настанот B т.е. настанот A е условен од настанот B .

Дефиниција. Условна веројатност на настанот A при услов да се појавил настанот B е веројатноста на настанот A кога веќе се појавил настанот B и се означува со $P(A|B)$.

Условната веројатност на настанот A при услов да се појавил настанот B се пресметува со формулата:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ каде } P(B) > 0.$$

Од оваа формула се добива $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$ што е формула за веројатност на производот од настаните A и B , кога е позната условната веројатност.

Пример 2. Експериментот се состои во фрлање коцка. Одреди ја веројатноста на појавување непарен број точки, ако е познато дека се појави број на точки кој не е поголем од 5.

Решение. Прво да ги означиме настаните од задачата. Нека настанот A е се појави непарен број точки, а настанот B е се појави број на точки кој не е поголем од 5. Тогаш $P(B) = \frac{5}{6}$, а $P(AB) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, бидејќи AB е настанот се појави непарен број точки кој не е поголем од 5. Според тоа условната

$$\text{веројатност е } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}.$$

Задача 1. Во една кутија има 4 сини и 7 црвени топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња едно по друго, без враќање. Одреди ја веројатноста дека двете извлечени топчиња се:

- сини
- црвени
- со различна боја

Решение. а) Да ги означиме настаните:

A_1 : првото извлечено топче е сино, а A_2 : второто извлечено топче е сино. Треба да ја одредиме веројатноста на настанот $A_1 A_2$ т.е.

$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$. Ако во тоа равенство замениме $P(A_1) = \frac{4}{11}$, а

$P(A_2 | A_1) = \frac{3}{10}$, затоа што после извлекување на едно сино топче во кутијата

останале вкупно 10 топчиња од кои 3 сини, тогаш за $P(A_1 A_2)$ имаме:

$P(A_1 A_2) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{55}$, б) Со слични ознаки, каде A_1 и A_2 ќе ги претставуваат

настаните во кои се извлекува црвено наместо сино топче се добива

$P(A_1 A_2) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{21}{55}$, в) Во овој случај треба да одредиме збир од

веројатностите на настаните второто извлечено топче е сино ако првото извлечено топче е црвено и обратно. Прво да ги означиме настаните:

A_1 : првото извлечено топче е сино, а A_2 : второто извлечено топче е сино. Тогаш спротивните настани се $\overline{A_1}$: првото извлечено топче не е сино т.е. тоа е црвено, а $\overline{A_2}$: второто извлечено топче не е сино т.е. тоа е црвено. Ние треба да го одредиме збирот од веројатностите на настаните $A_1 \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} A_2$. Со помош на формулата за условна веројатност се добива

$$\begin{aligned} P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) &= P(\overline{A_2}) \cdot P(A_1 | \overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2 | \overline{A_1}) = \\ &= \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} = 2 \cdot \frac{28}{110} = \frac{28}{55}. \end{aligned}$$

Задачи

1. Од кутија со 5 зелени и 3 жолти топчиња се извлекуваат две топчиња последователно без враќање. Одреди ја веројатноста на настанот:

а) второто извлечено топче е жолто

б) второто извлечено топче е жолто, ако е познато дека првото извлечено топче е зелено.

2. Колкава е веројатноста да се избере непарен број од првите триесет природни броеви, ако е познато дека тој е делив со 7?

3. Експериментот се состои во фрлање коцка. Одреди ја веројатноста на појавување парен број точки, ако е познато дека се појави број на точки кој не е поголем од 3.

4. Од шпил со 52 карти се извлекуваат две карти без враќање. Одреди ја веројатноста дека двете извлечени карти се десетки.

5.7. Независност на настани. Тотална веројатност

Разгледувањето на некои експерименти и настани поврзани со нив доведува до создавање нови поими.

Пример 1. Експериментот се состои од фрлање две коцки за играње. Да ги разгледаме настаните:

A : на горната страна на првата коцка се појави парен број и B : на горната страна на втората коцка се појави непарен број.

Очигледно е дека појавувањето на настанот A не зависи од појавувањето на настанот B .

Дефиниција. Настанот A е **независен** од настанот B ако појавувањето на настанот B не влијае на веројатноста на настанот A т.е. $P(A|B) = P(A)$.

Нека A е независен од B . Тогаш

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Ова значи дека настанот B е независен од настанот A , па A и B се независни настани.

Ако A и B се независни настани, тогаш $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Важи и обратното т.е. ако $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, тогаш A и B се независни настани.

Во пример 1 очигледна е независноста на настаните, но понекогаш заради интуиција може да извлечеме погрешен заклучок за независноста на настаните.

Пример 2. Експериментот се состои во извлекување една карта од шпил со 52 карти. Ги разгледуваме настаните:

A : извлечената карта е десетка и B : извлечената карта е со црна боја.

Дали настаните A и B се независни?

Решение. Интуитивно знаеме дека меѓу картите со број десет има карти со црна боја и обратно кај картите со црна боја има десетки. Според тоа може да помислиме дека настаните не се независни.

Јасно $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ и $P(AB) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$. Според тоа

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ т.е. настаните A и B се независни.

Пример 3. Во една кутија има 3 бели и 7 црни топчиња, а во друга има 4 бели и 3 црни топчиња. Секоја кутија има иста веројатност за избор. Одреди ја веројатноста на:

а) извлечено е бело топче од случајно избрана кутија

б) извлекувањето е извршено од првата кутија, ако е познато дека е извлечено бело топче.

Во сите досегашни примери извлекувавме топче од една кутија, а сега имаме две кутии на располагање со еднаква веројатност да бидат избрани. Ова е сосема друга ситуација, па за пресметување е потребна и друга постапка или формула.

Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ се настани такви што $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, $A_i A_j = \emptyset$, за секои $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Тогаш за секој настан $B \subseteq \Omega$ важи:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

Оваа формула се нарекува формула за тотална веројатност.

Ако сега во пример 3 означиме:

A_1 : избрана е првата кутија, A_2 : избрана е втората кутија, тогаш $A_1 A_2 = \emptyset$

и $A_1 + A_2 = \Omega$ и $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$.

а) Ако го означиме настанот B : извлечено е бело топче, тогаш $P(B|A_1) = \frac{3}{10}$ и $P(B|A_2) = \frac{4}{7}$, па според формулата за тотална веројатност се добива $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{61}{140}$.

б) Овде треба да пресметаме $P(A_1|B)$ т.е.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)}, \text{ па со замена на вредноста на } P(B)$$

$$\text{добиена од а) имаме } P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{61}{140}} = \frac{21}{61}.$$

Задачи

1. Познато е дека $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A+B) = \frac{1}{3}$ и $P(B) = p$.

а) Одреди ја вредноста на p , ако A и B се дисјунктни настани

б) Одреди ја вредноста на p , ако A и B се независни настани

2. Експериментот се состои во фрлање три монети во воздух. Дадени се настаните, A : на горната страна се појавија или три грба или три писма, B : на горната страна се појавија барем две писма и C : на горната страна се појавија најмногу два грба. Кои парови настани се независни?

3. Дадени се три кутии. Во првата кутија има 5 бели и 3 црни топчиња, во втората има 4 бели и 4 црни топчиња, а во третата кутија има само 8 бели топчиња. На случаен начин се бира една кутија и од неа се извлекува едно топче. Одреди ја веројатноста извлеченото топче е црно.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Колку пермутации започнуваат со 3 од сите пермутации што можат да се формираат од елементите 2, 3, 4, 5, 6?

2. Колку различни шестцифрени броеви можат да се формираат од цифрите 0, 2, 4, 6, 8, 9?

3. Колку пермутации од елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 почнуваат со:

а) 4 б) 234 в) 1234.

4. Колку петцифрени броеви можат да се запишат од цифрите 3, 3, 5, 7?

5. Колку пермутации од елементите 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 започнуваат со:

а) 33 б) 212 в) 1234.

6. Од колку различни елементи бројот на варијации од втора класа без повторување е 30?

7. Бројот на варијации од трета класа, со повторување, од n елементи е поголем за 96 од бројот на варијации од трета класа, без повторување, од истиот број елементи. Одреди го бројот на елементите.

8. Провери ја точноста на равенството: $V_7^5 : (V_6^4 + V_5^3) = 6$.

9. Провери ја точноста на равенството $(C_7^5 + C_9^3 - C_6^4) : C_5^3 = 9$.

10. Најди го бројот на комбинациите од петта класа со повторување, од елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

11. Од колку различни елементи вкупниот број на комбинации од втора класа со повторување изнесува 15?

12. Провери ја точноста на равенството $\overline{C}_7^4 - \overline{C}_3^2 - \overline{C}_5^3 = 169$.

13. Најди го бројот на елементи n ако:

а) $C_n^2 = 55$ б) $3C_{n+2}^3 = 10C_n^2$.

14. Бројот на комбинации од трета класа без повторување се однесува спрема бројот на комбинации од трета класа, со повторување, од истиот број елементи како 2:7. Најди го бројот на елементите.

15. Степенувај ги биномите:

а) $(3x+2)^6$ б) $(5a+3b)^7$ в) $\left(\frac{a}{b} + 2\sqrt{x}\right)^5$ г) $\left(a^{-3} + b^{\frac{2}{3}}\right)^4$.

16. Најди го:

а) третиот член во развојот на биномот $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^{11}$,

б) седмиот член во развојот на биномот $\left(\frac{3x^2}{5a} + \frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$.

17. На 10 коцки запишани се по ред буквите од зборот математика. Случајно се избираат 3 коцки и се редат во низа. Се добиваат зборови од три букви во кои може да има повторување на букви. Запиши го множеството елементарни настани.

а) Колку елементи има множеството елементарни настани?

б) Колку елементарни настани има случајниот настан во добиените зборови да нема повторување на букви?

18. На маса се фрлаат коцка, монета од еден денар и монета од пет денари и се забележува вредноста од горната страна од трите предмети во наведениот редослед. Запиши го подмножеството од множеството на елементарни настани за случајниот настан:

а) на сите предмети има непарна вредност,

б) збирот на вредностите од сите објекти е делив со 3, но не е парен,

в) вредноста на коцката се совпаѓа со аритметичката средина од вредностите што се појавуваат на монетите.

19. Во еден затворен сад имало 5 бели, 10 црни и 25 црвени топчиња. Се извлекува едно топче. Најди колкава е веројатноста да се извлече:

A_1 : бело топче,

A_2 : црно топче,

A_2 : црвено топче.

20. Колкава е веројатноста при фрлање коцка за игра да падне:

- а) три точки,
- б) повеќе од три точки.

21. Од броевите 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 се избира произволно еден број.

Колкава е веројатноста избраниот број да биде:

- а) парен,
- б) делив со 3,
- в) да биде непарен и делив со 3.

22. Во еден затворен сад има 5 еднакви топки нумерирани со 1, 2, 3, 4, 5.

Извлечени се произволно 3 од нив. Колкава е веројатноста извлечените топки да бидат:

- а) топките 1, 2, 3,
- б) една од нив да биде топката 4.

23. Експериментот се состои во фрлање една монета во воздух два пати.

Дадени се настаните, A : на горната страна се појави грб при првото фрлање, B : на горната страна се појави грб во второто фрлање и C : на горната страна се појави грб точно еднаш. Кои парови настани се независни?

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

Модуларна единица 1

1.1.

1. а) Да, б) Не, в) Да, г) Да.
 2. а) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0,1)$, и бидејќи $3 > 1$ функцијата е растечка,
 б) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0,1)$, и бидејќи $\frac{1}{3} < 1$ функцијата е опаѓачка,
 в) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0,1)$, и бидејќи $5,2 > 1$ функцијата е растечка,
 г) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0,1)$, и бидејќи $0,4 < 1$ функцијата е опаѓачка.
 3. а) $D_f = \mathbb{R}$, б) $D_f = \mathbb{R}$, в) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, г) $D_f = [0, +\infty)$.
 4. а) Функцијата е растечка, б) Функцијата е опаѓачка, в) Функцијата е опаѓачка, г) Функцијата е опаѓачка.
 5. а) $x > y$, б) $x < y$.

1.3.

1. а) $x = -3$, б) $x = 0$, в) $x = 8$.
 2. а) $x = 8$, б) $x = 2$, в) $x = -15$, г) $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.
 3. а) $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, б) $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, в) $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{4}$, г) $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

3. а) $x = y$, б) $x > y$, в) $x < y$. 4. а) $a^{\frac{3}{4}}$, б) $a^{\frac{2}{3}}$. 5. $x = 8$. 6. $x = 2$. 7. $x = -15$.
 8. $x = 1$. 9. $x = 1$. 10. 4. 11. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$.

Модуларна единица 2

2.1.

1.	Израз	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a (b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
	Логаритам	3	2	4	5	$\frac{1}{2}$
	Основа на логаритамот	6	x	$\sqrt{7}$	a	25
	Логаритмант	216	$\frac{4}{9}$	49	$b+2$	5

2. а) -2 , б) 2 , в) $\frac{1}{2}$, г) $-\frac{1}{2}$. 3. а) $x = \sqrt{3}$, б) $x = 6$, в) $x = 1$, г) 5 . 4. а) 2 , б) 9 .
 5. а) 1 , б) 30 . 6. $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

2.2.

1. а) $\log 3ab = \log 3 + \log a + \log b$, б) $\log a^2bc^5 = 2\log a + \log b + 5\log c$,
 в) $\log \frac{ab}{2c} = \log a + \log b - \log 2 - \log c$, г) $\log 2(a-b) = \log 2 + \log(a-b)$,
 д) $\log \frac{\sqrt{a}}{b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\log a - \log(b^2 - c^2)$, е) $\log \sqrt{a^3b^2} = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b$.
 2. а) $x=10$, б) $x=\frac{8}{9}$, в) $x=\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{2}}$, г) $x=\sqrt[4]{\frac{4^6}{3^4}}$.
 3. а) 0,60; 0,78; 0,90; 0,96; б) 1,08; 1,20; 1,26. 4. а) -3, б) 3, в) -1, г) -1.

2.3.

1. Упатство: а) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1$,
 б) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 4} \cdot \log_5 4 \cdot \frac{1}{\log_5 6} \cdot \frac{\log_5 6}{\log_5 7} \cdot \frac{\log_5 7}{\log_5 8}$.
 2. 8. 3. а) $-\frac{1}{2}$, б) -18, в) $\sqrt{5}$. 4. $\log_b a = \log \left(\frac{1}{b}\right)^{-1} a = -\log_{\frac{1}{b}} a$.

2.4.

1. а) Да, б) Не, в) Не, г) Не.
 2. а) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, графикот на функцијата е непрекината линија која минува низ I-квадрант и IV-квадрант, и ја сече x -оската во точката $(1,0)$, функцијата монотонно расте, бидејќи $5 > 1$,
 б) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, графикот на функцијата е непрекината линија која минува низ I-квадрант и IV-квадрант, и ја сече x -оската во точката $(1,0)$, функцијата монотонно опаѓа, бидејќи $0,3 < 1$,
 в) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, графикот на функцијата е непрекината линија која минува низ I-квадрант и IV-квадрант, и ја сече x -оската во точката $(1,0)$, функцијата монотонно опаѓа, бидејќи $\frac{1}{7} < 1$.
 3. а) $\mathbb{R}^+$, б) $(-9, +\infty)$, в) $(4, +\infty)$, г) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, д) $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.
 4. а) Монотонно опаѓачка, б) Монотонно опаѓачка, в) Монотонно растечка.
 5. а) a , б) b .

2.5.

3. а) Позитивен, б) Позитивен, в) Негативен, г) Негативен.
 4. а) $y > 0$ за $x \in (0,1)$, $y < 0$ за $x \in (1, +\infty)$,
 б) $y > 0$ за $x \in (-1, +\infty)$, $y < 0$ за $x \in (-2, -1)$, в) $y > 0$ за $x \in (1, 2)$, $y < 0$ за $x \in (2, +\infty)$.

2.6.

1. $x_{1,2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$. 2. $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$. 3. $x_1 = 2$. 4. $x_1 = 7$ и $x_2 = \frac{16}{3}$. 5. $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.
 6. $x_1 = 16$. 7. 4.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $x = 4$, б) $x = \frac{1}{81}$, в) $x = \frac{1}{10}$, г) 343, д) $x = \frac{1}{2}$, е) $\sqrt[5]{100}$, ж) $x = 2$, з) 0,04.
2. а) $\log 2 + \log x + \log y$, б) $\log 3 + 2\log x + 3\log y$, в) $2\log x + 5\log y + \frac{1}{2}\log z$, г) $\sqrt{b}\log a + 3\log c$, д) $\log 6 + \log x + \frac{2}{3}\log y$, е) $\frac{1}{2}(\log 2 + \log x) + \frac{1}{4}(3\log x + \frac{1}{2}\log y)$, ж) $\frac{1}{2}(\log x + \frac{3}{4}\log y)$.
3. а) $x = 6$, б) $x = 10$, в) $x = 21$, г) $x = 1125$, д) $x = \frac{5}{9}$.
4. а) $x \approx 6,73$, б) 0,00884, в) 76,296, г) $x = 42$.
5. а) $2\log_4 5$, б) $\frac{2}{\log_{\sqrt{7}} 3}$, в) $-\log_{\frac{1}{10}} 5$.
6. а) $\frac{1}{35}$, б) $\log_2 \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, в) 8, г) 1.
9. а) $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, б) $x \in (-1, +\infty)$, в) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, г) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.
10. $x_1 = 1$. 11. $x_1 = 5$. 12. $x_1 = 25$. 13. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. 14. $x_1 = 7$. 15. $x_1 = \frac{3}{2}$ и $x_2 = 10$.
16. $x = \frac{1}{12}$. 17. $x_1 = \frac{5}{4}$ и $x_2 = 3$. 18. $x_1 = 1$ и $x_2 = 10$.

Модуларна единица 3

3.1.

1. а) $\frac{2\pi}{3}$, б) $-\frac{3\pi}{2}$, в) 0. 2. а) 135° , б) $-157,5^\circ$, в) $\left(\frac{1800}{\pi}\right)^\circ$. 3. а) $20^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, б) $-320^\circ + (-1) \cdot 360^\circ$, в) $-\frac{\pi}{3} + (-3) \cdot 2\pi$. 4. $-60^\circ + (-8) \cdot 360^\circ = -2940^\circ$.

3.2.

1. а) II квадрант, б) I квадрант, в) II квадрант. 2.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

3.

	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

3.3.

1. а) негативен знак, б) позитивен знак, в) негативен знак, г) негативен знак 2. а) негативен знак, б) негативен знак, в) позитивен знак. 3. а) I или III квадрант, б) III или IV квадрант.

3.4.

1. а) 0, б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, д) $-\frac{1}{2}$, е) 0, ж) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, з) 1, с) $\sqrt{3}$, и) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, j) $\sqrt{3}$. 3. а) $\sqrt{3}$, б) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 4. а) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, б) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, в) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.5

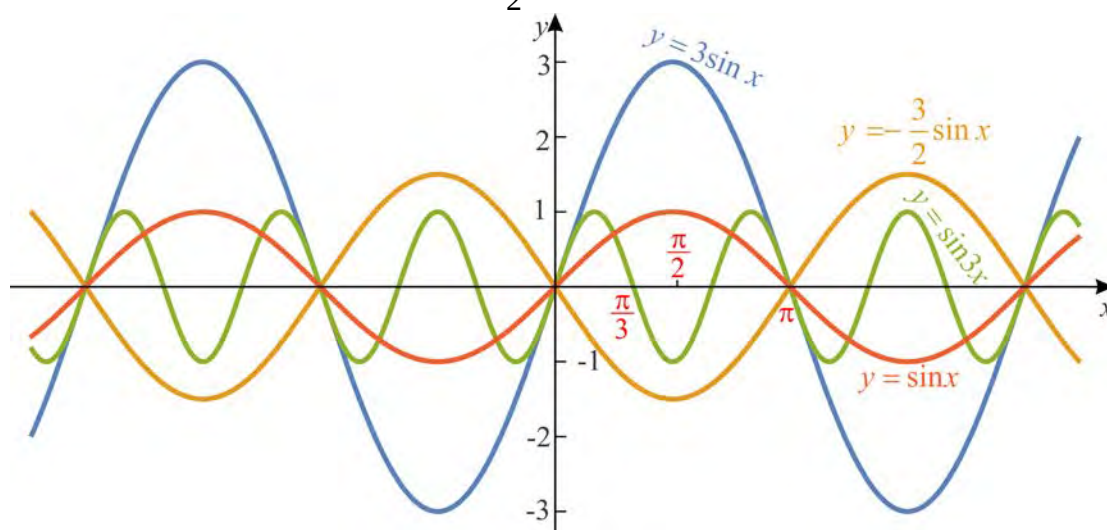
1. а) 0,8, б) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 2. а) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, б) $-\frac{8}{15}$. 3. а) 1, б) $\cos^2 \alpha$, в) $-\operatorname{tg}^2 \alpha$. 4. $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{40}{9}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{9}{40}$, б) $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, в) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$. 5. 0.

3.7.

1. $y = 3\sin x$

2. $y = -\frac{3}{2}\sin x$

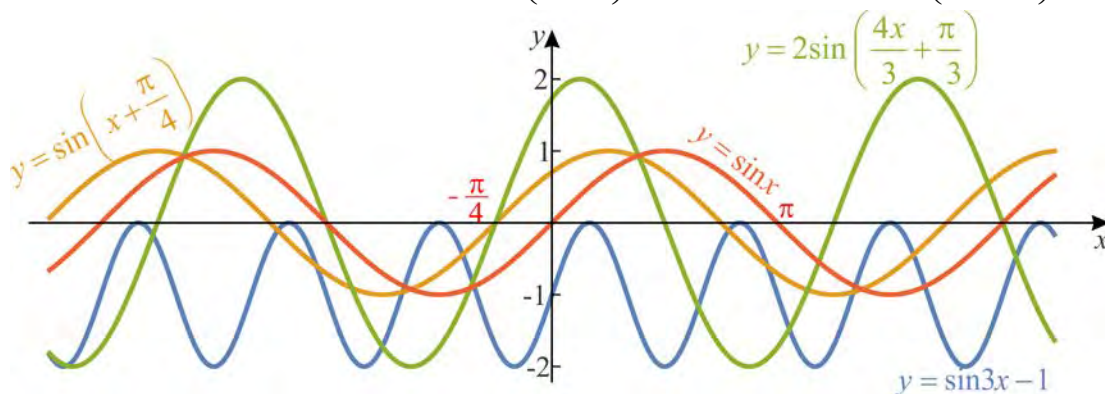
3. $y = \sin 3x$



4. $y = \sin 3x - 1$

5. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

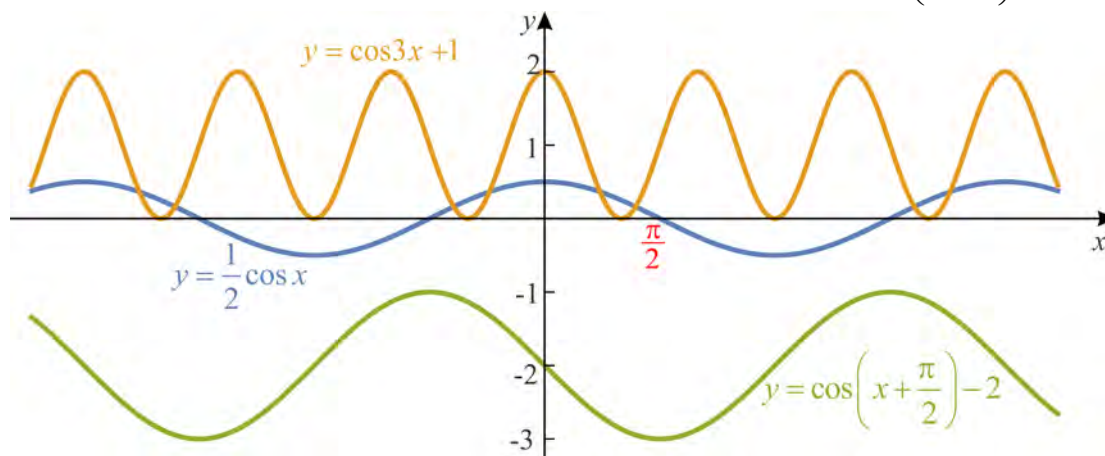
6. $y = 2\sin\left(\frac{4x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$



7. $y = \frac{1}{2}\cos x$

8. $y = \cos 3x + 1$

9. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$



3.8.

1. а) $-\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{2}$, в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, г) 0. 2. а) $\cos 2\alpha$, б) 0, в) $\frac{1}{2}$, г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. а) 3, б) $\frac{8\sqrt{3} + 7\sqrt{2}}{23}$.

3.9.

1. а) $-\frac{120}{169}$, б) $\frac{119}{169}$, в) $-\frac{120}{119}$, г) $-\frac{119}{120}$. 2. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8}}{8}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{56}}{8}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{7}$. 3. а) $\sin 40^\circ$, б) $\cos \frac{\pi}{5}$, в) $-\frac{1}{2}\sin \alpha$, г) $\operatorname{tg} 10^\circ$.

4. $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$. 5. а) $2\sin 50^\circ$,

б) $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$, в) $2\cos 20^\circ$, г) $\cos 18^\circ$.

3.10

1. $2 \cos 2 - 1$. 2. $\frac{1}{2}(\cos 12\alpha + \cos 2\alpha)$. 3. а) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$, б) $\frac{\sin \alpha}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.
5. а) $2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ$, б) $-2 \sin 60^\circ \sin 13^\circ$, в) $2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ$.

3.11.

1. нема решение 2. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 4. нема решение. 5. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
6. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 7. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 8. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 9. $x = \frac{31\pi}{90} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 10. $-0,32 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 11. $x_1 = -0,41 + 2k\pi, x_2 = 0,41 + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
12. $x_1 = 0,93 + k\pi, x_2 = -0,93 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3.12

1. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 2. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 4k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. $x_1 = \frac{1}{6} + 2k, x_2 = -\frac{1}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + (2k+1)3\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + 6k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
5. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 6. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
7. $x = \frac{7\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 8. $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 9. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
10. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 11. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 12. $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$.
13. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 14. $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 15. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
16. $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 17. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
18. $x_1 = 1,1 + k\pi, x_2 = 0,46 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 19. $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $\frac{3\pi}{4}$, б) $\frac{11\pi}{450}$. 2. $337^\circ 30'$. 3. а) $\cos 42^\circ, -\sin 35^\circ, -\sin 64^\circ$,
б) $-\cos 32^\circ, -\cos 16^\circ, \cos 48^\circ$, в) $-\operatorname{tg} 4^\circ, \operatorname{tg} 62^\circ, -\operatorname{tg} 69^\circ$,
г) $-\operatorname{ctg} 27^\circ, \operatorname{ctg} 26^\circ, -\operatorname{ctg} 36^\circ$. 4. а) $-0,99027$, б) $-0,34433$, в) $-0,93358$,
г) $0,48773$. 5. а) $3,90951$, б) $-4,58268$, в) $1,34622$.
6. а) $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{87}{425}$, б) $\frac{2\sqrt{8} + \sqrt{5}}{9}$, в) $\frac{\sqrt{35} + 6}{12}$, г) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{38}{41}$,
 $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{2}{11}$. 7. а) $\sin 2\alpha = \frac{12}{13}, \cos 2\alpha = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{12}{5}, \operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{5}{12}$,
б) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{30}}{10}, \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{70}}{10}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{3}$, в) $\frac{20\sqrt{2} - 27}{45}$.

8. а) $2\sin 50^\circ \cos 12^\circ$, б) $2\cos 34^\circ \cos 26^\circ$, в) $2\sin 19^\circ \cos 45^\circ$, г) $-2\sin 48^\circ \sin 26^\circ$.

10. а) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ б) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

в) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ г) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

д) $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ е) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

е) $x_1 = \frac{5\pi}{36} + 2k\pi, x_2 = \frac{31\pi}{36} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ж) $x_1 = \frac{\pi}{18} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{18} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

з) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ с) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

и) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ј) $x_1 = 2k\pi, x_2 = (2k+1)\pi, x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_4 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

к) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ л) $x_{1/2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_3 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

љ) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_4 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

м) $x_{1/2} = \pm \pi + 2k\pi, x_{3/4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ н) $x_{1/2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

њ) $x_1 = \pi + 2k\pi, x_2 = -\pi + 2k\pi, x_3 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_4 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Модуларна единица 4

4.1.

1. а) Во II-от квадрант, б) Во II-от квадрант, в) Во III-от квадрант, г) Во I-от квадрант, д) На x -оската, е) На y -оската, ж) На x -оската, з) На y -оската.

2. $m_x = 1$ и $m_y = 4$, $m_x = 5$ и $m_y = 2$.

4. а) $d = \sqrt{82}$, б) $d = 4$, в) $d = 3\sqrt{5}$, г) $d = 3\sqrt{5}$. 5. Не. 6. $y = 11$ или $y = -1$.

7. $C(21,18)$.

4.2.

1. $S_{AB}\left(4, -\frac{5}{2}\right)$, $S_{BC}(2,1)$, $S_{AC}\left(1, -\frac{7}{2}\right)$. 2. 5.

3. а) $\left(5, \frac{9}{5}\right)$, б) $\left(6, \frac{11}{5}\right)$, в) $(-7, -3)$, г) $(18, 7)$. 5. $A(-2, -6)$, $B(8, 2)$, $C(-6, 10)$.

4.3.

1. $P = 21$. 2. Не. 3. Да. 4. $P = 15$. 5. $P = \frac{55}{2}$.

4.4.

1. Само P е точка од правата. 2. а) $y = x$, б) $y = -x$, в) $y = 0$.

3. а) $k = 2$, $m = -3$, б) $k = -1$, $m = 3$, в) $k = 0$, $m = -2$, г) $k = \sqrt{3}$, $m = 0$.

4. $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$. 5. $y = -x - 1$.

4.5.

1. а) $2x - 3y - 3 = 0$, б) $y + 4 = 0$, в) $x - 3 = 0$.

2. а) $k = 2$, $m = 3$, б) $k = \frac{5}{2}$, $m = \frac{3}{2}$, в) $k = -\frac{3}{8}$, $m = -\frac{16}{3}$. 3. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $m = 3$.

5. $A > 0$ и $B < 0$ или $A < 0$ и $B > 0$.

4.6.

1. $3x + y + 5 = 0$. 2. $x + y + 3 = 0$.

3. а) $2x + y - 11 = 0$, б) $x - y - 10 = 0$, в) $3x - 2y - 27 = 0$.

4. а) $y + 1 = 0$, б) $3x - y - 10 = 0$, в) $x - y - 4 = 0$.

5. а) $x + y + 1 = 0$, б) $x + 2y + 3 = 0$, в) $x - 3y + 7 = 0$.

4.7.

1. а) $k = -\frac{7}{5}$, б) $k = -5$, в) $k = 0$. 2. $7x + 5y - 13 = 0$. 3. Не. 4. $y = 2x$.

5. $3x + 4y + 16 = 0$, $5x + y - 1 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.

4.8.

1. а) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$, 4 единици на x -оската, 6 единици на y -оската,

б) $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, 1 единица на x -оската, 1 единица на y -оската,

в) $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1$ $\frac{1}{2}$ единици на x -оската, 1 единица на y -оската.

2. $k = \frac{6}{85}$. 3. 18 квадратни единици. 4. $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$.

5. а) $b = -a$, б) $b = a$, в) $b = -a\sqrt{3}$.

4.9.

1. Равенките под г), д) и ё). 2. а) $M = \frac{1}{\sqrt{5}}$, б) $M = \frac{1}{\sqrt{101}}$, в) $M = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

3. а) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0$, б) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 3 = 0$, в) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{3}{2} = 0$,

г) $-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$, д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$, ё) $x \cos 10^\circ + y \sin 10^\circ + 4 = 0$.

4. а) $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$, б) $-\frac{1}{\sqrt{26}}x + \frac{5}{\sqrt{26}}y - \frac{10}{\sqrt{26}} = 0$, в) $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$.

4.10

1. $d = \frac{7}{5}$, не. 2. $d = \frac{2}{3}$. 3. $d_M = \frac{10}{\sqrt{5}}$ и $d_M = \frac{8}{\sqrt{5}}$. 4. $\frac{198}{\sqrt{97}}$, $\frac{99}{\sqrt{130}}$ и $\frac{22}{\sqrt{5}}$.

5. $x + y = 7 \pm 5\sqrt{2}$. 6. $4x - 3y + 26 = 0$ и $4x - 3y + 26 = 0$.

4.11.

1. а) Се сечат во точката (1,2), б) Се паралелни, в) Се совпаѓаат.

2. $A = 4$ и $B = 2$. 3. $5x - 6y + 28 = 0$. 4. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 5. Правите под а), б), д) и е).

6. $5x + 3y - 60 = 0$.

4.12.

1. $x^2 + y^2 = 25$.

2. а) $S(-7,0)$, $r = 3$, б) $S(-6,8)$, $r = 6$, в) $S(35,12)$, $r = 37$, г) $S(-30,-30)$, $r = 30$.

3. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$. 4. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$.

5. а) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$, б) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$.

4.13.

1. (3,-1) и (2,-2). 2. $\sqrt{90}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. $4(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{13})$. 2. а) $M(7,1)$, б) $M(14,1)$. 3. $\lambda = \frac{1}{2}$. 4. $6x - y - 5 = 0$.

5. $7x + 10y + 29 = 0$. 7. $D(1,-5)$. 9. а) $d = \frac{7}{5}$, б) $d = 1$.

10. $x - 3 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$, $x + 3y - 13 = 0$. 11. а) $T(-4,0)$.

12. а) $3\sqrt{10}$, б) $\sqrt{10}$, в) 15. 13. $P = 49$. 14. $4x + 3y - 120 = 0$, $48x + 9y + 72 = 0$.

15. а) $T\left(\frac{17}{12}, 11\right)$, б) $P = \frac{105}{8}$. 16. $3x + 8y - 7 = 0$ и $8x - 3y + 7 = 0$.

17. $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 6,25$. 18. $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{5}\right)^2 = 533$.

Модуларна единица 5

5.1

1. 120. 2. 720. 3. 120. 4. 2205.

5.2.

1. 210. 2. $5!$. 3. $V_8^3 = 6720$, $\bar{V}_8^5 = 8^5 = 32768$. 4. 7. 5. $n = 4$.

5.3.

1. 20. 2. 5. 3. 20. 4. $n_1 = 7, n_2 = 2$. 5. 38226

5.4.

1. $243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$.

2. $a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 6abc$.

3. $1 - 12y + 60y^2 - 160y^3 + 240y^4 - 192y^5 + 64y^6$.

4. $243x^5 + 405x^2 + 270x^3 + 90x^2 + 15x + 1$.

5. $x^2 + 4x^{3/2}y^{1/2} + 6xy + 4x^{1/2}y^{3/2} + y^2$. 6. $x^{4/3} - 4x + 6x^{2/3} - 4x^{1/3} + 1$. 7. $\frac{35}{81}x^3y^4$.

5.5.

1. а) 0,12; б) 0,4; 2. $\frac{1}{4}$. 3. $\frac{1}{36}$. 4. $\frac{1}{6}$. 5. $P \approx 0,109$. 6. а) $\frac{3}{10}$, б) $\frac{1}{5}$, в) $\frac{1}{2}$.

5.6.

1. а) $\frac{21}{56}$, б) $\frac{15}{56}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{1}{221}$.

5.7.

1. а) $\frac{1}{12}$, б) $\frac{1}{9}$. 2. $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{7}{8}$, па независни се A и B .

3. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$, $P(B|A_1) = \frac{3}{8}$, $P(B|A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B|A_3) = 0$, па

$$P(B) = \frac{7}{24}.$$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. 24. 2. 600. 3. а) 720, б) 24, в) 6. 4. 12. 5. а) 2520, б) 560, в) 210.

$$6. n = 6. 7. n = 6, 8. V_7^5 : (V_6^4 + V_5^3) = \frac{\frac{7!}{2!}}{\frac{6!}{2!} + \frac{5!}{2!}} = \frac{7!}{6! + 5!} = \frac{7!}{5!(6+1)} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 7} = 6$$

$$9. (C_7^5 + C_9^3 - C_6^4) : C_5^3 = \frac{\binom{7}{5} + \binom{9}{3} - \binom{6}{4}}{\binom{5}{3}} = \frac{21 + 84 - 15}{10} = \frac{105 - 15}{10} = 9.$$

$$10. \bar{C}_7^5 = \binom{11}{5} = 462. 11. n = 5. 12. \bar{C}_7^4 - \bar{C}_3^2 - \bar{C}_5^3 = \binom{10}{4} - \binom{4}{2} - \binom{7}{3} = 169. 13. 4.$$

$$14. 5. 15. \frac{1}{a^{12}} + \frac{4\sqrt[3]{b^2}}{a^9} + 6\frac{b\sqrt[3]{b}}{a^6} + 4\frac{b^2}{a^3} + b^2\sqrt[3]{b^2}. 17. а) 120 б) 10.$$

18. а) $A = \{(1,1,5), (3,1,5), (5,1,5)\}$, б) $B = \{(3,1,5), (4,G,5), (2,1,G), (3,G,G)\}$, в)

$C = \{(3,1,5)\}$. 19. а) $\frac{1}{8}$, б) $\frac{1}{4}$, в) $\frac{5}{8}$. 20. а) $\frac{1}{6}$, б) $\frac{1}{2}$. 21. а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{2}{5}$, в) $\frac{1}{5}$. 22.

$\frac{1}{10}$. 23. Сите парови настани

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР	3
1. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА	
1.1. Поим и основни својства на експоненцијална функција	5
1.2. График на експоненцијална функција	8
1.3. Експоненцијална равенка	13
2. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА. ЛОГАРИТАМСКА РАВЕНКА	
2.1. Поим за логаритам	18
2.2. Правила за логаритмирање	20
2.3. Врски меѓу логаритми со различни основи	24
2.4. Поим и основни својства на логаритамска функција	25
2.5. График на логаритамска функција	28
2.6. Логаритамски равенки	32
3. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ	
3.1. Мерење на агол. Проширување на поимот агол	38
3.2. Дефиниција на тригонометриски функции од произволен агол	42
3.3. Знак на тригонометриски функции од произволен агол. Менување на тригонометриски функции од произволен агол	47
3.4. Сведување на тригонометриски функции од произволен агол на тригонометриски функции од остар агол	50
3.5. Упростување тригонометриски изрази	55
3.6. Графици на основните тригонометриски функции	57
3.7. Скицирање на графици на тригонометриски функции	67
3.8. Адициони формули	75
3.9. Тригонометриски функции од двоен агол и половина агол	81
3.10. Трансформација на тригонометриски функции	85
3.11. Тригонометриски равенки	87
3.12. Тригонометриски равенки што севедуваат на основни	92
4. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА ВО РАМНИНА	
4.1. Растојание меѓу две точки	97
4.2. Делење на отсечка во даден однос	101
4.3. Плоштина на триаголник	103
4.4. Експлицитен облик на равенка на права	105
4.5. Општ облик на равенка на права	108
4.6. Равенка на права низ една точка	110
4.7. Равенка на права низ две точки	112
4.8. Сегментен облик на равенка на права	114
4.9. Нормален облик на равенка на права	116
4.10. Растојание од точка до права	118
4.11. Заемна положба на две прави	121
4.12. Кружница	125
4.13. Заемна положба на права и кружница	127

5. КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

5.1. Пермутации	131
5.2. Варијации	133
5.3. Комбинации	135
5.4. Биномна формула	138
5.5. Класична веројатност	140
5.6. Условна веројатност	144
5.7. Независност на настани. Тотална веројатност	147

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА	151
----------------------------------	------------

